Universität Tübingen — Wintersemester 2013/14
Mathematisches Institut — C. Hainzl

Mathematik für Physiker 3

Übungsblatt 5

Aufgabe 1: (×, ∗, 4 Punkte)

Zeige, dass für den Fejér-Kern $F_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} D_k(x)$ folgende Identität gilt: $F_N(x) = \frac{1}{N}\frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)}$. Dabei ist $D_k(x) = \sum_{|n|\leq k} e^{inx}$. Hinweis: Benutze die geometrische Reihe.

Aufgabe 2: (×, ∗, 4 Punkte)

Sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } x \leq 0, \\ 1, & \text{wenn } x > 0. \end{cases}$

a) Weiterhin sei $F_N(x) = \frac{1}{N}\frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)}$ der Fejér-Kern. Berechne $\lim_{N\to\infty}(f * F_N)(x)$, wobei die Formel für die Faltung so zu verstehen ist, dass f periodisch fortgesetzt wird wenn nötig.

b) Sei K_n ein guter Kern mit der Eigenschaft $K_n(-x) = K_n(x)$ für alle $x \in [-\pi, \pi]$ und für alle $n \in \mathbb{N}$. Berechne $\lim_{n\to\infty}(f * K_n)(x)$.

c) Sei K_n ein guter Kern mit der Eigenschaft, dass $\int_{-\pi}^{0} K_n(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Berechne $\lim_{n\to\infty}(f * K_n)(x)$.

Aufgabe 3: (×)

Seien f und g stetige, 2π-periodische Funktionen auf $\mathbb{R}$. Zeige, dass $(f * g)(x)$ wieder eine stetige, 2π-periodische Funktion ist.

Aufgabe 4: (×)

Wir beweisen im Folgenden den Approximationssatz von Weierstrass.

a) Sei $f : [-\pi, \pi] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine periodische, stetige Funktion und sei $\epsilon > 0$. Zeige, dass es ein Polynom p gibt mit $\sup_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x) - p(x)| < \epsilon$. Hinweis: Benutze die Aussage aus der Vorlesung, dass sich jede stetige Funktion am Kreis gleichmässig durch trigonometrische Polynome approximieren lässt.

b) Verallgemeinere den Beweis auf beliebige Intervalle.

c) Verallgemeinere weiter auf nichtperiodische stetige Funktionen. Hinweis: Benutze ein $\epsilon/2$-Argument.

Anmerkung: Aufgabenteil (b) und (c) sind optional und geben jeweils 2 Bonuspunkte für die Aufgabenwertung wenn sie abgegeben werden.

Aufgabe 5: (×)

Sei $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } |x| \leq \pi/4, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

Berechne die Funktion $(f * f)(x)$ durch geometrische Überlegung.