Mathematik für Physiker 3

Übungsblatt 6

Aufgabe 1: (×, ∗, 4 Punkte)

Sei $f \in S$. Zeige folgende Aussagen:

a) $[\widehat{f(x+h)}](k) = \hat{f}(k)e^{i2\pi hk}$,

b) $[\widehat{f(x)e^{-i2\pi xh}}](k) = \hat{f}(k+h)$,

c) $[\widehat{-2\pi i x f(x)}](k) = \frac{d}{dk}\hat{f}(k)$.

Aufgabe 2: (×)

Seien f und g die Funktionen

$$f(x) = \chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1-|x|, & |x| \leq 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Obwohl f nicht stetig ist, macht das Integral, welches die Fouriertransformation definiert trotzdem Sinn. Zeige, dass

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\sin(2\pi\xi)}{\pi\xi} \qquad \hat{g}(\xi) = \left(\frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}\right)^2,$$

wobei $\hat{f}(0) = 2$ und $\hat{g}(0) = 1$.

Aufgabe 3: (×)

Sei $f \in C_0^3(\mathbb{R})$ (d.h. 3-mal stetig differenzierbar mit kompaktem Träger). Zeige, dass $|\hat{f}(k)| \leq \frac{C}{|k|^3}$ mit geeigneter Konstante C.

Aufgabe 4: (×)

Seien F und G integrierbar auf dem Einheitskreis mit

$$F = \sum_n a_n e_n, \qquad G = \sum_n b_n e_n.$$

Zeige, dass

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta)\overline{G(\theta)}d\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \overline{b_n}.$$

Hinweis: Zeige die Parseval'sche Identität

$$(F,G) = \frac{1}{4}[\|F+G\|^2 - \|F-G\|^2 + i(\|F+iG\|^2 - \|F-iG\|^2)]$$

und benutze diese.

Aufgabe 5: (×, ∗, 4 Punkte)

Die Auslenkung einer schwingenden Saite zur Zeit t sei gegeben durch $u(x,t)$ und erfülle die Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad c^2 = \frac{\tau}{\rho}.$$

Die Saite sei an den beiden Enden fixiert, d.h. $\frac{\partial u}{\partial t}(x) = 0$ bei $x = 0$ und $x = L$.

Die Saite sei zur Zeit $t = 0$ wie folgt ausgelenkt:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= g(x), \end{aligned}$$

wobei $f \in C^1$ und g stetig ist. Die totale Energie der Saite setzt sich aus der kinetischen und der Potentiellen Energie zusammen und ist gegeben durch:

$$E(t) = \frac{1}{2}\rho \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\tau \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx.$$

Zeige, dass die totale Energie der Saite erhalten ist im Sinne, dass $E(t)$ konstant ist und zwar

$$E(t) = E(0) = \frac{1}{2}\rho \int_0^L g(x)^2 dx + \frac{1}{2}\tau \int_0^L f'(x)^2 dx.$$