Mathematik für Physiker 3

Übungsblatt 7

Aufgabe 1: (×)

Zeige, dass

$$(f,g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(x)} g(x)dx$$

ein Skalarprodukt ist. Wir definieren dafür, dass zwei Funktionen gleich sind wenn sie sich höchstens auf einer Nullmenge unterscheiden.

Aufgabe 2: (×)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Sägezahnfunktion, definiert durch $f(x) = (\pi - x)/2$ für $x \in (0, 2\pi)$ mit $f(0) = 0$ und periodisch fortgesetzt auf ganz $\mathbb{R}$.

Die Fourierreihe von f ist

$$\frac{1}{2i}\sum_{|n|\neq 0} \frac{e^{inx}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}.$$

f macht bei $x = 0$ einen Stetigkeitssprung von $f(0^+) - f(0^-) = \pi$.

Zeige, dass

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{0<x\leq\pi/N} S_N(f)(x) - \frac{\pi}{2} = \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t}dt - \frac{\pi}{2},$$

was ungefähr 9 % vom Sprung ausmacht. Dieses Resultat ist eine Manifestation des Gibbsschen Phänomens, welches besagt, dass nahe bei einem Stetigkeitssprung die Fourierreihe einer Funktion, von dieser um ungefähr 9 % abweicht.

Hinweis:

$$S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)e^{inx} = \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{1}{2}\int_0^x (D_N(t) - 1)dt,$$

wobei D_N den Dirichlet-Kern bezeichnet.

Aufgabe 3: (×)

Im Folgenden beweisen wir die Poissonsche Summenformel. Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und sei $\hat{f}$ ihre Fourier-transformierte.

a) Zeige, dass $F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)$ eine wohldefinierte Funktion ist, d.h. dass die Summe für jedes $x \in \mathbb{R}$ konvergiert.

b) Zeige f ist eine 1-periodische $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$-Funktion. Benutze dazu den folgenden Satz: Sei $h(x,n)$ eine Funktion mit $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(x,n)| < \infty$ für jedes $x \in (a,b) \subset \mathbb{R}$, $a < b$. Außerdem sei $h(x,n)$ stetig differenzierbar für alle $n \in \mathbb{Z}$. Es gebe eine nicht-negative Funktion $g(n)$ mit $\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n) < \infty$ und $|\frac{d}{dx}h(x,n)| \leq g(n)$ für alle $x \in (a,b)$ und $n \in \mathbb{Z}$. Dann ist $H(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(x,n)$ stetig differenzierbar und es gilt $\frac{d}{dx}H(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx}h(x,n)$.

c) Zeige $F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{2\pi inx}$ ohne dabei die Poissonsche Summenformel zu verwenden (wir beweisen sie gerade). Benutze dabei folgende Aussage: Sei $h(x,n)$ eine Funktion mit $\int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(x,n)|\mathrm{d}x < \infty$. Dann gilt $\int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(x,n)\mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 h(x,n)\mathrm{d}x$.