Mathematik für Physiker 3

Übungsblatt 8

Aufgabe 1: (×)

Sei der Vektorraum $V = \{f \in \mathcal{C}^\infty([-\pi,\pi],\mathbb{C}) | f(-\pi) = 0 = f(\pi)\}$ gegeben. Mache Dir kurz klar, dass V wirklich ein Vektorraum ist. Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren der linearen Abbildung $H_0 : V \to V$, $(H_0 f)(x) = -f''(x)$.

Aufgabe 2: (×, ∗, 4 Punkte)

Seien $v, w \in \mathbb{R}^2$ mit $\langle v, w\rangle_{\mathbb{R}^2} \neq 0$, wobei $\langle \cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^2}$ das kanonische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ bezeichnet. Wir betrachten die lineare Abbildung $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\mathbb{R}^2 \ni u \mapsto P\,u := w \frac{\langle v, u\rangle_{\mathbb{R}^2}}{\langle v, w\rangle_{\mathbb{R}^2}} \ .$$

a) Zeige, dass P eine Projektion ist, das heißt die Beziehung $P^2 = P$ erfüllt.
b) Bestimme den Kern und das Bild der Abbildung P.
c) Ist P eine orthogonale Projektion? Antworte mit einem Beweis.
d) Seien $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$, $v_2 = (0,0,1)$ und $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $Q(v) = \langle v_1, v\rangle_{\mathbb{R}^3} v_1 + \langle v_2, v\rangle_{\mathbb{R}^3} v_2$, wobei $\langle \cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^3}$ das kanonische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ bezeichnet. Stelle Q als Matrix dar. Ist Q eine orthogonale Projektion? Anmerkung: In der Quantenmachanik würde man Q in der Form $Q = |v_1\rangle\langle v_1| + |v_2\rangle\langle v_2|$ schreiben (Bracket-Notation).

Aufgabe 3: (×)

Zeige, dass auf dem $\mathbb{R}^2$ durch $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right\rangle := 2a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + 3a_2b_2$$

ein Skalarprodukt definiert ist. Führe das Gram-Schmidt-Verfahren für die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ durch.

Aufgabe 4: (×, ∗, 4 Punkte)

a) Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$ mit Basis $\mathcal{A} = (a_1, ..., a_n)$. Wir definieren nun n lineare Abbildungen $a_i' : V \to \mathbb{K}$ durch $a_i'(a_j) = \delta_{ij}$. Zeige, dass $\mathcal{A}' = (a_1', ..., a_n')$ eine Basis des Dualraums V' ist. Diese wird die duale Basis zu $\mathcal{A}$ genannt.
b) Sei nun eine zweite Basis $\mathcal{B} = (b_1, ..., b_n)$ von V gegeben, die man durch die Transformation mit S aus der Basis $\mathcal{A}$ erhält, d.h. $b_i = Sa_i$, $i = 1, ..., n$. Wie lautet die Abbildung, die $\mathcal{A}'$ in $\mathcal{B}'$ überführt?
c) Seien $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben. Berechne die duale Basis zu (v_1, v_2).

Aufgabe 5: (×)

Sei $D(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$. Berechne die (komplexen) Eigenwerte und Eigenvektoren von $D(\varphi)$.