Mathematik für Physiker 3

Übungsblatt 9

Aufgabe 1: (×, ∗, 4 Punkte)

Die Pauli-Matrizen sind definiert durch

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Weiter setzen wir für einen Vektor $a \in \mathbb{R}^3$, $a \cdot \sigma := \sum_{i=1}^3 a_i \sigma_i \in M(2,\mathbb{C})$ und definieren den Raum $\mathfrak{su}(2) := \{A \in M(2,\mathbb{C}) | A = a \cdot \sigma,\ a \in \mathbb{R}^3\}$, den wir als Vektorraum über $\mathbb{R}$ auffassen.

Zeige, dass

$$(a \cdot \sigma)(b \cdot \sigma) = \langle a, b \rangle_{\mathbb{R}^3} E_2 + i(a \times b) \cdot \sigma$$

gilt, wobei $a \times b$ das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$ bezeichnet und $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Nun definieren wir ein Skalarprodukt auf $\mathfrak{su}(2)$ durch

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{su}(2)} : \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2) \to \mathbb{R}, \quad \langle A, B \rangle_{\mathfrak{su}(2)} = \frac{1}{2}\mathrm{Spur}(AB).$$

Dabei ist $\mathrm{Spur}(A) = a_{11} + a_{22}$, wobei a_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$, die Einträge der Matrix A sind. Zeige, dass die lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathfrak{su}(2),\ a \mapsto a \cdot \sigma$ ein isometrischer Isomorphismus ist. D.h. ϕ ist ein Isomorphismus, der die Norm erhält. Der $\mathbb{R}^3$ ist mit dem euklidischen Skalarprodukt versehen.

Aufgabe 2: (×)

Sei $n \in \mathbb{R}^3$ normiert, also $\|n\| = 1$, und $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ der Vektor der Paulimatrizen aus Aufgabe 1. Zeige, dass

$$e^{i\alpha(n\cdot\sigma)} = \cos(\alpha)E_2 + i(n \cdot \sigma)\sin(\alpha).$$

Folgere daraus, dass $\exp(i\ \mathfrak{su}(2)) \subset SU(2)$ ist. Hinweis: Verwende die Beziehung aus Aufgabe 1 und die Reihendarstellung der Exponentialfunktion.

Aufgabe 3: (×, ∗, 4 Punkte)

Seien Äquivalenzrelationen definiert wie auf Seite 62 im Skript (Def. 3.72). Welche der folgenden Relationen $\sim$ sind Äquivalenzrelationen (mit Beweis)?

a) Für Matrizen $A, B \in M(n,\mathbb{K})$ und $n > 1$ setzen wir $A \sim B \Leftrightarrow AB = BA$.

b) Sei M eine nichtleere Menge von Vektorräumen. Für $U, V \in M$ setze $U \sim V$, falls es einen Isomorphismus $\Phi : U \to V$ gibt.

c) Für Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$, setze $a \sim b \Leftrightarrow a \geq b$.

Aufgabe 4: (×)

Bestimme die Spektraldarstellung der selbstadjungierten Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3i \\ 0 & -3 & 0 \\ -3i & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

d.h. schreibe A in der Form $A = \sum_{j=1}^3 \lambda_j P_j$ mit den Eigenwerten λ_j und den zugehörigen Spekralprojektionen P_j.

Aufgabe 5: $(\times)$

Bestimme eine Jordan-Normalform der Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme ebenfalls die zugehörige Transformationsmatrix.