# Mathematik für Physiker 3

Übungsblatt 10

**Aufgabe 1:** (×)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $A : I \to M(n, \mathbb{R})$ stetig. Sei $\Phi(t) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ der Propagator der homogenen linearen Differentialgleichung $\dot{x} = A(t)x$ zum Anfangszeitpunkt $t_0$. Zeige:

- Für alle $t \in I$ ist $\Phi(t)$ ein Vektorraumisomorphimus.
- Die Matrix $\Phi(t)$ erfüllt
$$\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t) \quad \text{mit} \quad \Phi(t_0) = E_n.$$

**Aufgabe 2:** (×, ∗, 4 Punkte)

a) Betrachte eine allgemeine homogene lineare Differentialgleichung $m$-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, d.h.
$$\sum_{i=0}^{m} a_i y^{(i)}(x) = 0, \quad \text{mit} \quad a_m \neq 0. \tag{1}$$
Wir definieren das zugehörige charakteristische Polynom durch $p(\lambda) := \sum_{i=0}^{m} a_i \lambda^i$. Sei nun $\lambda_j$ eine $l_j$-fache Nullstelle von $p$. Zeige, dass für $k_j = 0, 1, \ldots, l_j - 1$, $y(x) = x^{k_j} \exp^{\lambda_j x}$, $l_j$ linear unahbängige Lösungen von (1) gegeben sind.

b) Bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung
$$y^{(4)}(x) - 2y''(x) + y(x) = \exp^x .$$
**Hinweis:** Mache für die inhomogene Lösung den Ansatz $q(x)\exp^x$ mit einem Polynom $q$. Welchen Grad muss $q$ mindestens haben?

**Aufgabe 3:** (×)

Bestimme alle Lösungen der folgenden Differentialgleichung:
$$\dddot{x}(t) - 3\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) - x(t) = 1.$$

**Aufgabe 4:** (×)

Sei $I \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes Intervall, $t_0 \in I$ und $A : I \to M(n \times n, \mathbb{R})$ stetig. Wir betrachten die Differentialgleichung
$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \tag{2}$$
und machen den Ansatz
$$x(t) = \left( E_n + \sum_{j=1}^{\infty} \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 \ldots \int_{t_0}^{\tau_{j-1}} d\tau_j A(\tau_1) \ldots A(\tau_j) \right) x_0.$$

a) Rechne nach, dass $x$ die Differentialgleichung (2) zumindest formal löst.

b) Zeige, dass die Reihe in der Definition von $x(t)$ absolut konvergent ist für alle $t \in I$.

c) Zeige, dass $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ und dass $x$ tatsächlich die Differentialgleichung löst.

**Aufgabe 5:** (×, ∗, 4 Punkte)

Sei $V$ ein $n$-dimensionaler Skalaproduktraum und $Q(u) = \langle u, Tu \rangle$ mit einem symmetrischen Operator $T$. Seien die Eigenwerte von $T$ der Grösse nach angeordnet $\lambda_1 < ... < \lambda_m$. Zeige, dass

$$\lambda_1 = \min\{Q(u) | \; \|u\| = 1\} \quad \text{und} \quad \lambda_m = \max\{Q(u) | \; \|u\| = 1\}.$$

**Aufgabe 6:** (×, ∗, 4 Punkte)

Sei $V$ ein $n$-dimensionaler Vektorraum und $A \in \mathcal{L}(V)$.

a) Sei $S \in \mathcal{L}(V)$ invertierbar. Zeige: $\mathrm{Spur}(S^{-1}AS) = \mathrm{Spur}(A)$. Erinnerung: Die Spur einer Matrix ist definiert als die Summe der Diagonalelemente.

b) Sei $A \in \mathcal{L}(V)$ diagonalisierbar mit Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_r$ und geometrischen Vielfachheiten $n_1, ..., n_r$. Drücke $\mathrm{Spur}(A)$ und $\det(A)$ durch die Eigenwerte von $A$ aus. Hinweis: Benutze das Resultat aus Aufgabenteil a).

**Aufgabe 7:** (×)

Es sei $A$ eine reelle, reguläre ($A$ hat vollen Rang), symmetrische $n \times n$-Matrix, $b \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichnet im Folgenden das euklidische Skalarprodukt.

a) Zeige, dass sich die Gleichung
$$\langle x, Ax \rangle + \langle b, x \rangle = c$$
durch eine Koordinatentransformation der Form $x' = \alpha x + \beta$, $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}^n$, zu $\langle x', Ax' \rangle = 1$ umformen lässt, falls $c + \frac{1}{4}\langle b, A^{-1}b \rangle > 0$.

b) Betrachte die Gleichung
$$5x_1^2 - 26x_1x_2 + 5x_2^2 + 10x_1 - 26x_2 = 31.$$
Bringe die Gleichung zunächst auf die Form $\langle x', Ax' \rangle = 1$ und diagonalisiere anschliessend $A$, um die Art des Kegelschnittes zu bestimmen, der durch die Gleichung beschrieben wird. Fertige eine Skizze des Kegelschnittes in den ursprünglichen Koordinaten an.

**Aufgabe 8:** (×)

Bestimme die Jordan-Normalform der Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Gib auch die zugehörige Transformationsmatrix an.