

MATHEMATIK FÜR PHYSIKER 3
Übungsblatt 11

Aufgabe 1: (×)

Bestimme sämtliche Gleichgewichtspunkte des Systems

$$\dot{x}(t) = 1 - x(t)y(t), \quad \dot{y}(t) = x(t) - y(t)^3$$

und ihren Stabilitätscharakter.

Aufgabe 2: (×)

Untersuche die Gleichgewichtslösungen der folgenden Systeme auf Stabilität:

a) $\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x(t) - x(t)y(t)^2 \\ -y(t) - x(t)^2y(t) \end{pmatrix},$

b) $\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x(t)^3 + y(t) \\ -x(t) - y(t)^5 \end{pmatrix}.$

Aufgabe 3: (×)

Das gedämpfte mathematische Pendel

Seine Differentialgleichung ist

$$\ddot{\varphi} + \frac{r}{ml}\dot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin(\varphi) = 0$$

(m die Masse und l die Länge des Pendels, $r > 0$ der Dämpfungskoeffizient, g die Erdbeschleunigung).

Das zugehörige System

$$\dot{\varphi} = \psi, \quad \dot{\psi} = -\frac{g}{l}\sin(\varphi) - \frac{r}{ml}\psi.$$

Zeige:

a) Dieses System hat die Gleichgewichtspunkte $(\varphi_k, \psi_k) := (k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) $(0, 0)$ ist asymptotisch stabil, $(\pi, 0)$ instabil.