Mathematik für Physiker 3

Übungsblatt 12

Aufgabe 1: (×, ∗, 4 Punkte)

Ein Instabilitätskriterium

$(0,0)$ sei ein isolierter Gleichgewichtspunkt des Systems

$$\dot{x} = F(x,y), \qquad \dot{y} = G(x,y).$$

Zeige, dass er gewiss dann *instabil* ist, wenn es eine Funktion $E(x,y)$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

a) E ist auf einer offenen Umgebung U von $(0,0)$ stetig differenzierbar;

b) die Funktionen E und $\frac{\partial E}{\partial x}F + \frac{\partial E}{\partial y}G$ verschwinden im Nullpunkt und sind ansonsten *positiv*.

Erinnerung: Ein Gleichgewichtspunkt $\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0)$ heisst *stabil*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit folgenden Eigenschaften gibt: Gilt für eine Lösung $\boldsymbol{x}(t) = (x(t), y(t))$ und für ein gewisses t_0 die Ungleichung $\|\boldsymbol{x}(t_0) - \boldsymbol{x}_0\| < \delta$ so ist $\|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_0\| < \varepsilon$ für alle $t \geq t_0$.

Aufgabe 2: (×, ∗, 4 Punkte)

Für Funktionen $g \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ mit $g(0) = 0$ und $g(1) = 1$ sei das Funktional J definiert durch

$$J(g) = \int_0^1 \dot{g}(t)^2 - g(t)^2 + 2tg(t)\ \mathrm{d}t.$$

Finde eine Funktion g, die extremal unter der Variation des Funktionals J ist. Ist g eindeutig bestimmt?