Mathematik für Physiker 3

Übungsblatt 13

Aufgabe 1: (×)

Sei $F(t, y_1, ..., y_m, p_1, ..., p_m)$ zweimal stetig differenzierbar. Weiterhin seien $M = \{f \in \mathcal{C}^2([a,b], \mathbb{R}^m), f(a) = c, f(b) = d\}$ und $J(f) = \int_a^b F(t, f(t), \dot{f}(t))\, \mathrm{d}t$. Es gelte $J(g) \leq J(f)$ für alle $f \in M$. Zeige, dass g die Gleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial p_k}F(t, g, \dot{g}) = \frac{\partial}{\partial y_k}F(t, g, \dot{g})$$

erfüllt.

Aufgabe 2: (×, ∗, 4 Punkte)

Sei $f(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$ mit $\alpha > 1$. Zeige, dass die Legendre-Transformierte von f gegeben ist durch $g(p) = \frac{p^\beta}{\beta}$ mit $\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} = 1$. Zeige auch die Youngsche Ungleichung $xp \leq \frac{x^\alpha}{\alpha} + \frac{p^\beta}{\beta}$.

Aufgabe 3: (×, ∗, 4 Punkte)

Gegeben sei die Lagrange-Funktion $L(q, \dot{q}) = \frac{m\dot{q}^2}{2} - U(\|q\|)$ mit $q \in \mathbb{R}^3$. Sei

$$h_s(q) = \exp\left[s\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} q\right]$$

($s \in \mathbb{R}$) eine einparametrige Familien von Diffeomorphismen des $\mathbb{R}^3$. Mache Dir klar, dass h_s eine Drehung um die z-Achse um den Winkel s beschreibt. Zeige, dass h_s die Funktion L invariant lässt und bestimme die zugehörige Erhaltungsgrösse mittels Noether Theorem.

Aufgabe 4: (×)

Seien $g_{ij} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ für $i, j = 1, 2$ und $q \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$. Ferner sei das Wirkungsfunktional gegeben durch

$$J(q) = \sum_{i,j=1}^{2} \int_a^b \dot{q}_i(t) g_{ij}(q(t)) \dot{q}_j(t)\, \mathrm{d}t.$$

Bestimme die Bewegungsgleichung, der eine Funktion $q(t) = (q_1(t), q_2(t))$ genügen muss wenn sie ein Extremalpunkt von J ist.