# 5 Variationsrechnung

#### 5.0.0.1 Beispiel.

Wir suchen einen Pfad von $a$ nach $b$ mit den festgehaltenen Werten $f(a) = c$ und $f(b) = d$. Wie muss die Funktion $y = f(x)$ gewählt werden, sodass die Pfadlänge minimal wird?

Wir führen ein Funktional ein

$$L(f) = \int_a^b \|\gamma(x)\| dx = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, \mathrm{d}x$$

wobei wir den gewählten Pfad durch die Kurve $y(x) = (x, f(x))$ beschreiben.
Sei $M = \{f | f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f \in C^2([a, b]), f(a) = c \text{ und } f(b) = b\}$.

Frage:
Gibt es ein Element $g \in M$, sodass $L(g) \leq L(f)\ \ \forall f \in M$? In diesem Fall ist dies offensichtlich eine Gerade von $c$ nach $d$. Für andere Probleme kann die Frage entsprechend beliebig komplizierter werden.

**5.1 Motivation** (Allgemein Formulierung des Problems)**.** Gegeben sei eine reelwertige, zweimal stetig differenzierbare Funktion $F(t, y, p)$ der drei Veränderlichen $(t, y, p)$ (Wir werden diese später als Zeit, Ort und Ortsableitung interpretieren) und die

$$\text{Menge } M = \{f | f : [a, b] \to \mathbb{R}, f \in C^2(\mathbb{R}), f \text{ erfüllt die Randbedingungen } f(a) = c, f(b) = b\}.$$

Es stellt sich die Frage der Maximierung von $F$ durch Elemente aus $M$:
Existiert ein $g \in M$ mit

$$J(g) = \int_a^b F(t, g(t), \dot{g}(t))\, dt \leq \int_a^b F(t, f(t), \dot{f}(t))\, \forall f \in M \quad ?$$

Wir wollen im Folgenden die notwendigen Bedingungen finden, sodass $J(g) \leq J(f)\ \forall f \in M$ gilt.

**5.2 Allgemeine Vorgehenseweise.** Angenommen wir haben ein $g(x)$ welches die Bedingung erfüllt, dann finden wir weitere Funktionen $f(x)$ in der Nähe von $g(x)$ finden, die sich von $g(x)$ nur um eine kleine Störung $\eta(x)$, $f_\varepsilon(x) = g(x) + \varepsilon\eta(x)$ unterscheiden.
Wähle $\eta(x) \in C^2([a, b])$ mit $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Es gilt also

$$f_\varepsilon(a) = c \text{ und } f_\varepsilon(b) = d \iff f_\varepsilon(x) \in M \tag{5.1}$$

sind also auch potentielle Lösungen.

Nach Voraussetzung gilt für das Gesuchte $g$

$$J(g) \leq J(f_\varepsilon) = J(g + \varepsilon\eta) =: \varphi(\varepsilon) \qquad \forall\varepsilon\ (\varepsilon < 0 \text{ ist i.A. möglich})$$

$$\text{mit } \varphi(\varepsilon) = \int_a^b F(t, g(t) + \varepsilon\eta(t), \dot{g}(t) + \varepsilon\dot{\eta}(t))\mathrm{d}t \qquad \varphi : [-\delta, \delta] \to \mathbb{R}$$

Damit gilt auch $\varphi(\varepsilon) \geq \varphi(0)\ \forall\varepsilon$. Da $F$ zweifach stetig differenzierbar ist, ist auch $\varphi \in C^2([a, b])$ mit. Dann hat $\varphi(\varepsilon)$ bei $\varepsilon = 0$ offensichtlich ein Minimum, sodass $\varphi(0) = 0$ gilt.

Gleichzeitig gilt aber auch:

$$\frac{d}{d\varepsilon}\varphi(\varepsilon) = \varphi'(\varepsilon) = \int\limits_a^b \frac{\partial F}{\partial y}\left(t, g+\varepsilon\eta, \dot{g}+\varepsilon\eta(t)\right)\eta(t) + \frac{\partial F}{\partial p}\Big(t, g+\varepsilon\eta, \dot{g}+\varepsilon\eta(t)\Big)\dot{\eta}(t)\mathrm{d}t$$

$$\text{sodass } \varphi'(0) = \int\limits_a^b \frac{\partial F}{\partial y}(t,g,\dot{g}) + \frac{\partial F}{\partial p}\Big(t,g,\dot{g}\Big)\dot{\eta}(t)\mathrm{d}t \underset{\text{Minimum}}{\overset{!}{=}} 0 \tag{5.2}$$

Partielle Integration des zweiten Terms liefert mit den Randbedingungen: $\eta(a) = \eta(b) = 0$:

$$\int\limits_a^b \frac{\partial F}{\partial p}\Big(t, g(t)\dot{g}(t)\Big)\dot{\eta}(t)\,\mathrm{d}t = \underbrace{\frac{\partial F}{\partial p}(t,g,\dot{g})\eta(t)\Big|_a^b}_{=0} - \int\limits_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial p}\Big(t, g(t), \dot{g}(t)\Big)\eta(t)\,\mathrm{d}t$$

Damit erhalten wir für (5.2)

$$\varphi'(0) = 0 = \int\limits_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}(t,g,\dot{g}) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial p}F(t,g,\dot{g})\right)\cdot\eta(t)\,\mathrm{d}t$$

**5.0.0.2 Lemma. Fundamentallemma der Variationsrechnung**

Sei $f \in C[a,b]$ und für jedes $\eta \in C^2[a,b]$ mit $\eta(a) = \eta(b) = 0$ gelte $\int_a^b f(t)\eta(t)\mathrm{d}t = 0$.
Dann ist $f(t) = 0$ auf $[a,b]$.

*Beweis.* Angenommen es sei $f(t_0) > 0$ für ein $t_0 \in [a,b]$. Dann gibt es $[t_1,t_2]$ mit $f(t) > 0$ auf $[t_1,t_2]$, da $f$ auf $[a,b]$ stetig. Wir konstruieren uns ein $\eta$:

$$\eta(t) = \begin{cases} (t-t_1)^4(t-t_2)^4 & t \in [t_1,t_2] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\eta(t)$ erfüllt also die Voraussetzung und es gilt $\int_a^b f(t)\eta(t)\mathrm{d}t > 0$, was aber Widerspruch zur Annahme ist, dass $\int_a^b f(t)\eta(t)\mathrm{d}t = 0$. Damit muss $f(t_0) = 0$ $\forall t_0 \in [a,b]$ gelten □

**5.3 Bemerkung** (Euler-Lagrange-Gleichung)**.** Es gilt

$$0 = \int\limits_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial p}\right]\eta(t)\mathrm{d}t \quad \forall\eta \in C^2[a,b]$$

Daraus folgt:

$$\frac{\partial F}{\partial y}\Big(t, g(t)\dot{g}(t)\Big) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial p}F\Big(t, g(t), \dot{g}(t)\Big) = 0 \tag{5.3}$$

Wir nennen die Gleichung (5.3) auch *Euler-Lagrange-Gleichung.*

**5.4 Satz.** Sei die Funktion $F(t,y,p) \in C^2([a,b])$. Dann muss $g \in M$ mit $J(g) \leq J(f_\varepsilon)$ oder $J(g) \geq J(f_\varepsilon)$ $\forall f \in M$ notwendigerweiße der Euler-Lagrange-Gleichung genügen. Ausgeschrieben bedeutet das:

$$(5.3) \iff \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial p}F(t,g,\dot{g}) - \frac{\partial^2}{\partial p\partial y}F(t,g,\dot{g})\dot{g}(t) - \frac{\partial^2}{\partial p^2}F(t,g,\dot{g})\ddot{g}(t) = 0$$

Und wir schreiben symbolisch für die Variation:

$$\delta\int F = 0$$

Es sei nochmals betont, dass die nur eine notwendige, aber keinesfalls hinreichende Bedingung für $g$ darstellt.

**5.0.0.3 Beispiel.** **Forts. des einführenden Beispiels**

Mit $F(t,y,p) = \sqrt{1+p^2}$ gilt

$$L(f) = \int\limits_a^b \sqrt{1+f(x)^2}\mathrm{d}x$$

weiterhin erhalten wir damit:

$$\frac{\partial}{\partial y}F = 0,\ \frac{\partial}{\partial t}F = 0,\ \frac{\partial^2}{\partial p \partial y}F = 0,\ \frac{\partial^2}{\partial p^2}F \cdot \ddot{g} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} - \frac{p^2}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}\right) \cdot \ddot{g} = \frac{1}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \ddot{g}$$

Gleichung (5.3) (*Euler-Lagrange-Gleichung*) fordert damit:

$$\frac{1}{(1+\dot{g})^{\frac{3}{2}}} \cdot \ddot{g}(t) \overset{!}{=} 0 \iff \ddot{g}(t) \overset{!}{=} 0 \iff g(t) \overset{!}{=} c_1 t + c_2$$

Also das erwartete Ergebnis: $g(t)$ muss, um das Funktional zu minimieren, eine Gerade sein.

**5.0.0.4 Beispiel.** **Oberflächenminimierung einer Rotationsfläche**

Wir betrachten wieder einen Pfad und rotieren diesen um die $x$-Achse. Wir suchen nun den Pfad, welcher die Oberfläche des so erhaltenen Körpers minimiert.

Sei die Kurve $g(t)$, $(t, 0, g(t)) = (x, 0, z)$. Die Parametrisierung der Oberfläche ist gegeben durch

$$x(t,\varphi) = D_\varphi \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ g(t) \end{pmatrix} = \exp\left[\varphi \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ g(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ g(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \sin(\varphi)g(t) \\ \cos(\varphi)g(t) \end{pmatrix}$$

Und die Oberfläche selbst ist dann gegeben durch

$$A = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 |X_t \times X_\varphi| \,\mathrm{d}t\mathrm{d}\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 \left| \begin{pmatrix} -\dot{g}(t)g(t) \\ \sin(\varphi)g(t) \\ \cos(\varphi)g(t) \end{pmatrix} \right| = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 \sqrt{\dot{g}^2 g^2 + g^2}\mathrm{d}t = 2\pi \int\limits_0^1 g(t)\sqrt{1+\dot{g}^2(t)}\mathrm{d}t$$

$F(y,p) = y\sqrt{1+p^2}$

Wir sehen, dass keine Zeitabhängigkeit $t$ vorliegt. Die Euler-Lagrange-Gleichung nimmt dann folgende Form an:

$$\frac{\partial}{\partial y}F - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial p}F \cdot \dot{g} - \frac{\partial^2}{\partial p^2}F \cdot \ddot{g} = 0 \qquad | \cdot \dot{g}$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial y}F\dot{g} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial p}F \cdot \dot{g}^2 - \frac{\partial^2}{\partial p^2}F \cdot \ddot{g}\dot{g}}_{=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(F - \dot{g}\frac{\partial}{\partial p}F\right)} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}F \cdot \dot{g} + \frac{\partial}{\partial p}F\ddot{g} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial p}\dot{g}^2 - \frac{\partial^2}{\partial p^2}F\ddot{g}\dot{g}$$

Dies ist die *Legendre-Transformierte*, entspricht hier also genau der Hamiltonfunktion, welche unabhängig von der Zeit $t$ ist:

$$L - \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = -H \iff L - \dot{x}p = -H \text{ beziehungsweise } H = \dot{x} \cdot p - L$$

Also

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(F - \dot{g}\frac{\partial F}{\partial p}\right) = 0$$

$$\iff F - \dot{g}\frac{\partial F}{\partial p} = c = g(t)\sqrt{1+\dot{g}^2} - g(t)\frac{\dot{g}^2}{\sqrt{1+\dot{g}^2}} = c$$

mit dem Ansatz $\dot{g}(t) = \sinh(u(t))$:

$$\iff c = g\sqrt{1+\sinh^2 u} - g(t)\frac{\sinh^2 u}{\sqrt{1+\sinh^2 u}} = g\cosh u - g(t)\frac{\sinh^2 u}{\cosh u} = g\left(\frac{\cosh^2 u - \sinh^2 u}{\cosh u}\right) = c$$

$$\iff g = c\cosh u(t),\ \dot{g}(t) \overset{\text{Ansatz}}{=} \sinh u(t) = c\sinh(u(t)) \cdot \dot{u}(t) \Leftrightarrow \dot{u} = \frac{1}{c} \Leftrightarrow u(t) = \frac{1}{c}t + d$$

Wir erhalten damit

$$g(t) = c \cdot \cosh\left(\frac{t}{c} + d\right)$$

**5.5 Satz** (Euler-Lagrange-Gleichung für mehrere Unabhängige)**.** Die Funktion $f(t, y_1, \ldots, y_m, p_1, \ldots, p_m)$ sei für alle $t \in [a, b]$ und beliebige $y_j, p_j$ wohldefiniert und zweimal stetig differenzierbar. Sei

$$M = \left\{f | f : [a, b] \to \mathbb{R}^m, f(a) = \vec{c} \text{ und } f(b) = \vec{d}\right\}$$

mit den Randbedingungen $\vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^m$ und den Komponentenfunktionen $f_1, \ldots, f_m$ ebenfalls zweimal stetig differenzierbar. Sei

$$J(f) = \int_a^b F\Big(t, f_1(t), \ldots f_n(t), \dot{f}_1(t), \ldots f_m(t)\Big)\,\mathrm{d}t$$

Dann muss jede Funktion $g \in M$

$$J(g) \leq J(f) \forall f \in M \quad \text{oder} \quad J(g) \geq J(f) \forall f \in M$$

notwendig die Euler-Lagrange-Gleichung erfüllen:

$$\frac{\partial F}{\partial y_k}(t, g, \dot{g}) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial p_k}F(t, g, \dot{g}) = 0 \qquad k = 1, \ldots, m$$

*Beweis.* Übungsaufgabe (analog wie in einer Dimension).

**5.6 Bemerkung.**

$$J(g) \leq J(f)\ \forall f \in M \iff J(g + \varepsilon\eta) \quad \text{mit } \eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m) \text{ und } \eta(a) = \eta(b) = 0$$

und der Variation:

$$\delta J = 0 \iff \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} J(g + \varepsilon\eta) = 0$$

**5.7 Bemerkung.** Die Komponentenfunktionen beschreiben dann zum Beispiel verschiedene Teilchen oder Freiheitsgrade in verallgemeinerten Koordinaten.

## 5.1 Hamiltonsches Prinzip

Wir betrachten ein konservatives Kraftfeld mit der potentiellen Energie $U(q_1, \ldots, q_n)$ mit $n$ Teilchen und (in $d = 3$), $n = 3N$ Koordinaten. Sei $T(q, \dot{q}) = T(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q_,}n)$ die kinetische Energie. Unter der Bahn des Systems versteht man den Weg

$$t \mapsto q(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{pmatrix}$$

Das *Hamiltonschen Prinzip* lautet:
Sei $L = T - U$. In einem konservatives Kraftfeld verläuft die Bahn eines Systems zwischen zwei Lagen $q(t_0)$ und $q(t_1)$ so, dass das Wirkungsintegral

$$\int_{t_0}^{t_1} L(q, \dots q)\,\mathrm{d}t \qquad \text{extremal wird.}$$

Die Wirkung muss also Euler-Lagrange genügen, wir erhalten die bekannten Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L - \frac{\partial}{\partial q_i} L = 0 \\ \iff &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} T - \frac{\partial}{\partial q_i} T = -\frac{\partial U}{\partial q_i} \qquad\qquad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

**5.8 Bemerkung.** Die kinetische Energie $T$ hängt in kartesischen Koordinaten natürlich nicht von den einzelnen Koordinaten $q_1, \dots, q_n$ ab. Unter einer Koordinatentransformation, bspw. in Zylinderkoordinaten, ist dies aber allgemein nicht notwendigerweise so. (vgl. Analytische Mechanik).

**5.9 Beispiel.** Sei $T = \frac{\dot{q}^2 m}{2}$ und $U(q) = -\frac{g}{\|q\|}$ und $q = (q_1, q_2, q_3)$. Dann erhalten wir die Newton'schen Gleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{q}m = -DU \iff \ddot{q}m = -\nabla U$$

**5.10 Definition.** Ein Lagrange-System $L$ heißt *invariant* unter einem Diffeomorphismus $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, wenn $L(q, \dot{q}) = L(h(q), \dot{h}(q))$ gilt.

**5.11 Theorem** (Noether Theorem)**.** Sei $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus und $h^S(q)$ eine einparametrige Gruppen von Diffeomorphismen. Wenn das System $(\mathbb{R}, L)$ invariant unter $h^S$ ist, dann hat das System die Erhaltungsgröße

$$I(q, \dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \left.\frac{\mathrm{d}h^S(q)}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \qquad \text{mit } q = (q_1, \dots, q_n).$$

*Beweis.* Sei $q = \varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$ eine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung. Da $h^S$ die Lagrangefunktion $L$ invariant lässt,

$$L\Big(\varphi(t), \dot{\varphi}(t)\Big) = L\Big(h^S(\varphi(t)), \dot{h}^S(\varphi(t))\Big) \tag{5.4}$$

muss $h^S(\varphi(t))$ auch die Euler-Lagrange-Gleichung erfüllen, also:

$$\begin{aligned} &q = \Phi(s, t) = h^S\Big(\varphi(t)\Big) \qquad\qquad \text{ist auch Lösung der Gleichung} \\ \iff &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}} L(\Phi, \dot{\Phi}) = \frac{\partial}{\partial q} L(\Phi, \dot{\Phi}) \end{aligned}$$

Da nun (5.4) gilt, folgt

$$\frac{\partial L}{\partial S} = 0 \iff \frac{\partial L}{\partial q}\Phi' + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{\Phi}' \qquad\qquad \text{mit } \Phi' = \frac{\partial}{\partial s}\Phi$$

Wir verwenden, dass $\Phi$ auch Lösung der Lagrangegleichung ist und diese unter $h^S$ invariant ist, wir erhalten:

$$\iff \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\Phi' + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{\Phi}' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\Phi'\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}h^S(q)\Big|_{s=0}\right)}_{=:I(q,\dot{q})} = 0$$

Der letzte Term ist genau die gesuchte Erhaltungsgröße bezüglich der Zeit. □

**5.12 Beispiel.** Sei $h^S(q)$ zum Beispiel $h^S(q) = (q_1 + s, q_2, q_3) = q + se_1$ mit $q = (e_1, e_2, e_3)$.

**5.13 Beispiel.** Mit $L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 + U(q_2, q_3)$, $q = (q_1, q_2, q_3)$ erhalten wir: $h^S(q) = q + se_1$ und $U(q + e_1 s) = U(q)$. Wir können die Erhaltungsgröße dann direkt ablesen als:

$$I = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \frac{\partial h^S}{\partial s}\bigg|_{s=0} = m\dot{q} \cdot e_1 = m\dot{q}_1 = p_1$$

also der Impuls in der ersten Variable(nrichtung) ist die Erhaltungsgröße.

## 5.2 Legendre-Tranformation

Sei $f(x)$ eine konvexe Funktion, d.h. $f''(x) > 0$. Die Legendre-Tranformierte ist dann gegeben durch

$$(\mathcal{L}f)(p) = \max\{xp - f(x)\} \iff p = f'(x)$$

Auflösen nach $x$ ergibt:

$$x(p) = \left(f'(p)\right)^{-1}$$

also muss $p = f'(x)$ invertierbar sein. Dass ist gegeben, da nach Voraussetzung (Konvexität) gilt:

$$f''(x) > 0 \iff f' \text{ ist streng monoton wachsend und damit bijektiv.}$$

Wie ist anschaulich die Legendre-Transformierte zu interpretieren und aus $f(x)$ bestimmbar?

Hier könnte eine schöne Grafik stehen

Durch Anwendung der Legendre-Transformation überführen wir

$$f(x) \xrightarrow{\text{Legendre-Transformation}} (\mathcal{L}f)(p) = g(p)$$

Erneute Legendre-Transformation der neuen Funktion ergibt wieder die Ursprüngliche:

$$g(p) \xrightarrow{\text{Legendre-Transformation}} (\mathcal{L}g)(x) = f(x)$$

**5.14 Satz** (Legendre-Transformierte)**.** Wir zeigen, dass die Umformung ohne Informationsverlust durchgeführt werden kann.

*Beweis.* Proof by “Bildle”. □

Wähle

$$xp - g(p) = G(x, p)$$

Sei $x$ fest und ein beliebigs festes $p$, $G(x, p) = xp - g(p)$ wird dann maximal für $p$, sodass

$$p = f'(x)$$

Die Legendre-Transformierte ist dann eben genau das Maximum, sodass wir eine Gleichheit zwischen der ursprünglichen Funktion und der transformierten Funktion erhalten.

**5.15 Bemerkung.** Sei $f(x)$ und $g(p)$ die zu $f(x)$ zugehörige Legendre-Transformierte. Dann gilt, dass

$$\begin{aligned} px - f(x) &\leq g(p) = \max_x \{xp - f(x)\} \\ \Rightarrow px &\leq f(x) + g(p) \end{aligned}$$

**5.16 Folgerungen.** Sei $f(x) = \frac{x^2}{2}$. Die zugehörige Legendre-Transformierte ist gegeben durch: $g(p) = \max\{(xp - f(x)\}$ mit $p = f'(x) = x$, also

$$f(x) = \frac{x^2}{2} \xrightarrow{\text{Legendre-Transformation}} g(p) = p^2 - \frac{p^2}{2} = \frac{p^2}{2}$$

Damit erhalten wir aber direkt:

$$px \leq \frac{x^2}{2} + \frac{p^2}{2}$$

was trivial ist.
Wir können aber auf gleiche Art und Weise die Young'sche Ungleichung beweisen, nämlich

$$px \leq \frac{x^\alpha}{\alpha} + \frac{p^\beta}{\beta}$$

*Beweis.* Übungsaufgabe.

**5.17 Bemerkung** (Geschichte)**.** Geschichtlich steckt hinter der Young'schen Ungleichung die Vermutung, dass gar nicht Herr Young die Ungleichung gefunden hat, sondern seine Frau. Da in damaligen Zeiten die Publikation von mathematischen Problemen durch Frauen allerdings gesellschaftlich fraglich war, hat so vermutlich der Mann die Lorbeeren die seiner Frau zustehen „eingeheimst".

**5.18 Satz** (Legendre-Transformation von mehreren Veränderlichen)**.** Sei $f(\vec{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ eine strikt konvexe Funktion (das bedeutet: Hess$(f)$ ist positiv definit). Dann ist die Legendre-Transformation gegeben durch

$$g(p) = \max_x \{p \cdot \vec{x} - f(\vec{x})\} \iff p = \nabla f(\vec{x})$$

**5.19 Beispiel** (Hamiltonschen Mechanik)**.** Sei $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $L$ eine konvexe Funktion bezüglich $\dot{q}$. Die Hamiltonfunktion ist dann gegeben durch

$$H(p, q) = \max_{\dot{q}} \{p \cdot \dot{q} - L(q, \dot{q})\} \iff p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

Für Standardanwendungen (typische kinetische Energien) erfüllt L die Anforderung an strikte Konvexität und damit ist in diesen Fällen die Hamilton-Funktion eindeutig definiert.

**5.20 Theorem** (Kanonische Bewegungsgleichungen)**.** Das System der Lagrangen-Gleichungen (bzw. für Schweizer: Euler-Lagrange-Gleichung) ist äquivalent zu dem System

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \qquad & q &= (q_1, q_2, \ldots, q_n) \\ \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \qquad & p &= (p_1, p_2, \ldots, p_n) \end{aligned}$$

*Beweis.* Mit der Hamilton-Funktion (aus der Legendre-Transformation) erhalten wir durch differenzieren: Wir invertieren nach $\dot{q}$

$$H(p, q) = p \cdot \dot{q} - L(q, \dot{q}) \qquad \Rightarrow p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \quad \dot{q} = \dot{q}(q, p)$$

Für den ersten Term erhalten wir also:

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q} + p\frac{\partial \dot{q}}{\partial p} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial \dot{q}}{\partial p} = \dot{q} + p\frac{\partial \dot{q}}{\partial p} - p\frac{\partial \dot{q}}{\partial p} = \dot{q}$$

analog erhalten wir für den zweiten Term:

$$\frac{\partial H}{\partial q} = p \cdot \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial L}{\dot{q}}\frac{\partial \dot{q}}{\partial q} = -\frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p = -\dot{p}$$ □