Prof. Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2013/2014
13.12.2013

Mathematik für Physiker I

Übungsblatt 10

Aufgabe 38: Abschluss von Mengen (3 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen weder offen noch abgeschlossen in $\mathbb{R}$ ist und $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ gilt.

b) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

(i) $\omega \in \overline{\Omega} \iff \exists\,(z_n)$ in Ω : $\lim_{n\to\infty} z_n = \omega$.

(ii) Ω ist abgeschlossen $\iff \Omega = \overline{\Omega}$

$\iff \forall\,(z_n)$ in Ω mit $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ gilt $z_0 \in \Omega$.

Aufgabe 39: Gleichmäßige Stetigkeit und Lipschitz-Stetigkeit (3 Punkte)

Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $\Omega \subset \mathbb{K}$. Dann heißt $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *gleichmäßig stetig*, falls

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \;\; \forall\, x, y \in \Omega : \; |x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| \;<\; \varepsilon.$$

$f : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt *Lipschitz-stetig*, falls

$$\exists\, L > 0 \;\; \forall\, x, y \in \Omega : \quad |f(x) - f(y)| \;<\; L\,|x - y|.$$

Zeigen Sie:

a) Ist f Lipschitz-stetig, dann ist f auch gleichmäßig stetig.

b) Ist f stetig und Ω kompakt, so ist f auch gleichmäßig stetig.

Tipp: Widerspruchsargument!

c) Die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ ist gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig.

Tipp: Zeigen Sie für die gleichmäßige Stetigkeit, dass zumindest $f|_{[1,\infty)}$ Lipschitz-stetig ist und verwende Sie dann a) und b)!

Aufgabe 40: Funktionenfolgen (4 Punkte)

a) Betrachten Sie die Funktionenfolgen $(f_n), (g_n)$ mit $f_n, g_n : (0, 1) \to \mathbb{R}$ und

(i) $f_n(x) \;:=\; \sqrt[n]{x}$,

(ii) $g_n(x) \;:=\; \frac{1}{n} x^n$.

Zeigen Sie, dass beide Folgen punktweise konvergieren und geben Sie jeweils die Grenzfunktion an. Beweisen oder widerlegen Sie die gleichmäßige Konvergenz der Folgen.

b) Zeigen Sie, dass die Produktfolge $(f_n \cdot g_n)$ zweier gleichmäßig konvergenter Folgen $(f_n), (g_n)$ von Funktionen $f_n, g_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ wieder gleichmäßig konvergent ist, falls f_n und g_n jeweils gleichmäßig beschränkt sind, also $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty < \infty$ und $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|g_n\|_\infty < \infty$. Finden Sie außerdem ein Beispiel, das zeigt, dass dies für unbeschränkte Funktionenfolgen nicht so ist.

Aufgabe 41: Ableiten, Ableiten, Ableiten (8 Punkte)

Leiten Sie die folgenden Funktionen mit Hilfe von Produkt-, Quotienten- und Kettenregel ab.

a) $f_1(x) := a^x$ für $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$,

b) $f_2(x) := x^a$ für $a \in \mathbb{C}$ und $x > 0$,

c) $f_3(x) := x^x$ für $x > 0$,

d) $f_4(x) := \frac{\sin(x)\, \mathrm{e}^{1/\sqrt{1+x^2}}}{2+\sin(x)}$ für $x \in \mathbb{R}$,

e) $f_5 := h \cdot f \cdot g$,

f) $f_6 := h \circ f \circ g$,

g) $f_7 := h \circ (1/g)$,

h) $f_8 := \ln(h)$,

wobei $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebige differenzierbare Funktionen mit $g \neq 0$ und $h > 0$ sind.

Aufgabe 42: Unstetige Funktionen $*$ (4 Zusatzpunkte)

a) Betrachten Sie die Funktionen $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \end{cases} \qquad g(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 1/q & \text{für } x = p/q \in \mathbb{Q} \text{ vollständig gekürzt.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f nirgends stetig ist und g genau dann in x stetig ist, wenn $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Tipp: Um die Stetigkeit von g in $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ zu beweisen, zeigen Sie, dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Umgebung von x gibt, in der kein Bruch mit Nenner $\leq n$ liegt, da es nur endlich viele solche Brüche im Intervall $[0, 1]$ gibt.

b) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Zeigen Sie:

(i) In jedem $x_0 \in (a, b)$ existiert der links- und der rechtsseitge Grenzwert von f, d.h. es existieren

$$f(x_0-) := \lim_{x \to x_0} f|_{[a,x_0)}(x) \quad \text{und} \quad f(x_0+) := \lim_{x \to x_0} f|_{(x_0,b]}(x).$$

Tipp: Vergleichen Sie beliebige Folgen jeweils mit der Folge $(x_0 \mp 1/n)$.

(ii) f hat höchstens abzählbar unendlich viele Unstetigkeitsstellen.
Tipp: Zeigen Sie zunächst, dass $\omega(x) := f(x+) - f(x-) > 1/n$ nur für endlich viele x gelten kann!

Abgabe: Bis spätestens 12.00 Uhr am Dienstag den 07.01.2014 im Briefkasten von Herrn Teufel (Gebäude C, Raum links vom Eingang in Ebene 3).