Prof. Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2013/2014
13.01.2014

Mathematik für Physiker I

Übungsblatt 12

Aufgabe 46: Simple Optimierung (2 Punkte)

Wie muss das Verhältnis von Höhe und Radius eines Zylinders gewählt werden, damit er bei gegebenen Volumen V eine minimale Oberfläche F besitzt?

Aufgabe 47: Taylor-Entwicklung (4 Punkte)

a) Bestimmen Sie ein Polynom $P(x)$, so dass für $x \in [-1, 1]$

$$|\exp(x) - P(x)| \; < \; 10^{-2}.$$

b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.

Tipp: Verwenden Sie die Taylorreihen von sin, cos und der reellen Exponentialfunktion sowie den Cauchy-Produktsatz!

Aufgabe 48: Leibniz-Regel (4 Punkte)

a) Berechnen Sie die 42. Ableitung der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) \; := \; 2x^3 \sin(3x - 42).$$

b) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jeweils n-mal differenzierbar. Zeigen Sie, dass

$$f \cdot \frac{\mathrm{d}^n g}{\mathrm{d}x^n} \; = \; \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}} \big(f^{(k)} \cdot g\big).$$

Aufgabe 49: Taylorreihen (6 Punkte)

Bestimmen Sie die Taylorreihen von f, g, h um x_0 und den jeweiligen Kovergenzradius, wobei

a) $f(x) \; = \; \frac{1}{1-x}, \quad x_0 = -1,$

b) $g(x) \; = \; \frac{1}{1+x^2}, \quad x_0 = 0,$

c) $h(x) \; = \; \arctan x, \quad x_0 = 0.$

Tipp: Man kann a) und b) auch lösen, ohne die allgemeine Form für $f^{(n)}$ bzw. $g^{(n)}$ zu bestimmen. Für c) kann b) hilfreich sein!

Abgabe: Bis spätestens 10.00 Uhr am Montag den 20.01.2014 im Briefkasten von Herrn Teufel (Gebäude C, Raum links vom Eingang in Ebene 3) oder zu Beginn der Vorlesung bis 10.15 Uhr im Hörsaal N9.