Mathematik für Physiker I

Übungsblatt 13

Aufgabe 50: Hinreichendes Kriterium für lokale Extrema (2 Punkte)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f \in C^2(I)$. Zeigen Sie: Gilt bei $x_0 \in I$

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_0) < 0 \quad (\text{bzw. } f''(x_0) > 0)\,,$$

so hat f bei x_0 ein lokales Maximum (bzw. Minimum).

Aufgabe 51: Satz von de L'Hôpital (4 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim_{x\to a} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{3(x-a)}$ für $a \geq 0$,

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)-x+x^3/3!-x^5/5!}{x^5}$ für $a \in \mathbb{R}$,

c) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right)$,

d) $\lim_{x\to\infty} \frac{1-e^{1/x^2}}{1-e^{1/x}}$.

Aufgabe 52: Symmetrische Differenzenquotienten (3 Punkte)

a) Der symmetrische Differenzenquotient D_{x_0} einer Funktion f ist definiert durch

$$D_{x_0}(h) \;:=\; \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}.$$

Zeigen Sie: Ist f in x_0 differenzierbar, so ist $\lim_{h\to 0} D_{x_0}(h) = f'(x_0)$.

b) Zeigen Sie, dass für $f \in C^3(a,b)$ und $x_0 \in (a,b)$ gilt

$$D_{x_0}(h) = f'(x_0) + \mathcal{O}(h^2),$$

d.h., es existieren Konstanten $h_0 > 0$ und $c > 0$ so, dass $|D_{x_0}(h) - f'(x_0)| \leq c \cdot h^2$ für $h \in (0, h_0)$. *Tipp:* Taylorentwicklung!

c) Sei $f \in C^4(a,b)$ und $x_0 \in (a,b)$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2} \;=\; f''(x_0) \;+\; \mathcal{O}(h^2).$$

Aufgabe 53: Integration elementarer Funktionen (3 Punkte)

Berechnen Sie das Integral $\int_0^1 f_i(x)\mathrm{d}x$ für $i = 1, 2, 3$, wobei

a) $f_1(x) \;=\; x$,

b) $f_2(x) \;=\; x^2$,

c) $f_3(x) \;=\; \exp(x)$,

indem Sie jeweils explizite Folgen von Treppenfunktionen φ_n^i konstruieren mit $\varphi_n^i \to f_i$ gleichmäßig und $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \varphi_n^i$ auswerten.

Aufgabe 54: Regelfunktionen $*$

a) Zeigen Sie: Mit f und g sind auch $f+g$ und $f \cdot g$ Regelfunktionen.

b) Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt stückweise stetig, falls Zwischenpunkte $a = x_0 < x_1 < ... < x_K = b$ existieren, so dass für alle $k = 1, ..., K$ die Funktion $f_k := f|_{(x_{k-1},x_k)}$ stetig ist und $\lim_{x\to x_{k-1}} f_k(x)$ und $\lim_{x\to x_k} f_k(x)$ existieren.

   Zeigen Sie, dass jede stückweise stetige Funktion eine Regelfunktion ist.

c) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) \;:=\; \begin{cases} \sin(1/x) & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

   Zeigen Sie, dass f keine Regelfunktion ist, aber Riemann-integrierbar, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ existieren Treppenfunktionen φ, ψ mit $\varphi \le f \le \psi$ und

$$\int_0^1 \psi - \int_0^1 \varphi \;<\; \varepsilon.$$

Abgabe: Bis spätestens 10.00 Uhr am Montag den 27.01.2014 im Briefkasten von Herrn Teufel (Gebäude C, Raum links vom Eingang in Ebene 3) oder zu Beginn der Vorlesung bis 10.15 Uhr im Hörsaal N9. Die mit $*$ gekennzeichneten Aufgaben müssen nicht schriftlich abgegeben werden.