Prof. Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2013/2014
27.01.2014

Mathematik für Physiker I

Übungsblatt 14

Aufgabe 55: Partielle Integration (4 Punkte)

a) Berechnen Sie die folgenden Stammfunktionen.

(i) $\int^x y^2 \sin(y)\,\mathrm{d}y$,

(ii) $\int^x \sin^2(y)\,\mathrm{d}y$.

b) Zeigen Sie, dass für alle $m, n \in \mathbb{N}$

(i) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \;=\; \pi \cdot \delta_{nm}$, wobei $\delta_{mn} = 1$ falls $n = m$ und $\delta_{nm} = 0$ sonst.

(ii) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = 0$.

Aufgabe 56: Integration periodischer Funktionen (3 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig und periodisch mit Periode $p > 0$, d.h.

$$f(x+p) \;=\; f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$F(x) \;:=\; \int_x^{x+p} f(t)\,\mathrm{d}t$$

konstant ist, also nicht von x abhängt. Bestimmen Sie dann

a) $\int_0^{2\pi} \cos^2(x)\,\mathrm{d}x$,

b) $\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x$,

c) $\int_0^{\pi} \cos^2(x)\,\mathrm{d}x$,

d) $\int_0^{\pi} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x$,

e) $\int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\,\mathrm{d}x$,

f) $\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Aufgabe 57: Substitution (5 Punkte)

a) Berechnen Sie die Stammfunktionen von f_i für $i = 1, 2, 3$ durch Substitution, wobei

(i) $f_1(x) \;=\; x\,\mathrm{e}^{-x^2}$,

(ii) $f_2(x) \;=\; x^3/\sqrt{1+x^4}$,

(iii) $f_3(x) \;=\; \sqrt{1+x^2}$. (*Tipp:* Substituieren Sie $x = \sinh z$!)

b) Berechnen Sie das Integral $\int_0^a f_i(x)\,\mathrm{d}x$ für $i = 4, 5$, wobei

(i) $f_4(x) \;=\; \sqrt{x}/(1+x)$,

(ii) $f_5(x) \;=\; \sqrt{x}/(1+\sqrt{x})$.

Aufgabe 58: Ableiten von Integralen (1 Punkt)

Seien $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig. Bestimmen Sie die Ableitung von $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$F(x) \;:=\; \int_0^{h(x)} g(x) f(y)\, dy.$$

Aufgabe 59: Uneigentliche Integrale $*$

Sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ stetig und das uneigentliche Integral $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ existiere und sei endlich.

a) Zeigen Sie mittels eines Gegenbeispiels, dass nicht notwendigerweise $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ gilt.

b) Sei nun f zusätzlich stetig differenzierbar und $\int_0^\infty f'(x)\,\mathrm{d}x$ existiere und sei endlich. Zeigen Sie, dass dann

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \;=\; 0$$

folgt.

Abgabe: Bis spätestens 10.00 Uhr am Montag den 03.02.2014 im Briefkasten von Herrn Teufel (Gebäude C, Raum links vom Eingang in Ebene 3) oder zu Beginn der Vorlesung bis 10.15 Uhr im Hörsaal N9. Die mit $*$ gekennzeichneten Aufgaben müssen nicht schriftlich abgegeben werden.