Mathematik für Physiker I

Übungsblatt 15

Aufgabe 60: Integration und reelle Partialbruchzerlegung

Bestimmen Sie das Integral

$$\int_1^2 \frac{x^2-1}{x^3+2x^2+x}\,\mathrm{d}x$$

mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung des Integranden.

Aufgabe 61: Fourierreihen

Die Fourierkoeffizienten einer 2π-periodischen integrierbaren Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ sind gegeben durch

$$a_n = \tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad b_n = \tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{für } n\in\mathbb{N}_0$$

und

$$c_n = \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{für } n\in\mathbb{Z}.$$

(a) Zeigen Sie, dass für gerade Funktionen f, also $f(x)=f(-x)$ für alle $x\in\mathbb{R}$,

$$a_n = \tfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(nx)f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad b_n = 0$$

gilt.

(b) Zeigen Sie, dass für ungerade Funktionen f, also $f(x)=-f(-x)$ für alle $x\in\mathbb{R}$,

$$a_n = 0 \quad \text{und} \quad b_n = \tfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)f(x)\,\mathrm{d}x$$

gilt.

(c) Sei f reellwertig. Was ergibt sich daraus für die Koeffizienten c_n?

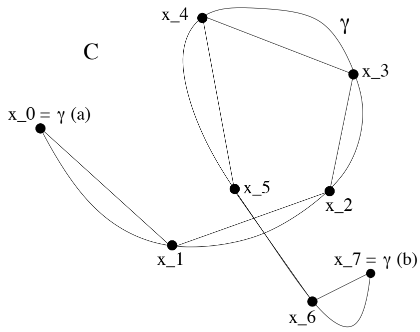
(d) Bestimmen Sie die Fourierreihe der periodischen Fortsetzung von

$$f:[0,2\pi)\to\mathbb{R}\,, \quad x\mapsto f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x\in[0,\pi) \\ 0 & \text{für } x\in[\pi,2\pi)\,. \end{cases}$$

Welche Aussagen können Sie über die Konvergenz der Fourierreihe machen?

(e) Verschieben Sie die Funktion aus (d) jeweils so, dass sie gerade bzw. ungerade wird und berechnen Sie jeweils die zugehörige Kosinus- bzw. Sinusreihe.

Aufgabe 62: Länge von Kurven



Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig. Dann beschreibt

$$\{\gamma(t) \,|\, t \in [a, b]\}$$

eine Kurve in der Ebene (siehe Bild rechts). Die Länge $L(\gamma)$ der Kurve γ ist definiert als Supremum der Längen aller Polygonzüge durch γ. Seien $\{a = x_0 < x_1 < ... < x_K = b\}$ Zwischenpunkte. Dann ist $\sum_{k=1}^{K} |\gamma(x_k) - \gamma(x_{k-1})|$ die Länge des entsprechenden Polygonzugs.

Zeigen Sie, dass für stetig differenzierbares γ gilt, dass

$$L(\gamma) \;=\; \int_a^b |\gamma'(x)| \, dx.$$

Tipp: Verwenden Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung, um $\sum_{k=1}^{K} |\gamma(x_k) - \gamma(x_{k-1})|$ als Riemann-Summe aufzufassen. Zeigen Sie dann die Monotonie bei Verfeinerung des Polygonzugs und folgern Sie daraus, dass Limes und Supremum übereinstimmen.

Abgabe: Das Blatt muss nicht abgegeben werden. Es wird aber in der ersten Woche im Sommersemester in den Übungsgruppen zu Mathematik für Physiker 2 besprochen.