Prof. Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2013/2014
21.10.2013

Mathematik für Physiker I

Übungsblatt 2

Aufgabe 5: Induktionsbeweise I

Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

a) $$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

b) $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Machen Sie sich die Bedeutung der Aussagen auch anschaulich klar!

Aufgabe 6: Induktionsbeweise II

Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

a) $$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \, y^{n-k} \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

b)$*$ Wird ein Kreis durch n Sekanten in Teilgebiete zerlegt, so läßt er sich mit 2 Farben so einfärben, dass benachbarte Gebiete verschiedene Farben haben. "Benachbart" bedeutet hier, dass die Gebiete entlang einer Strecke aneinanderstoßen (also nicht nur in einem Punkt).

Aufgabe 7: Ein falscher Induktionsbeweis $*$

Wo genau liegt der Fehler in folgendem "Induktionsbeweis"?

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $2 \cdot n = 0$.

Induktionsanfang: Für $n = 0$ ist $2 \cdot n = 2 \cdot 0 = 0$.
Induktionsannahme: Die Behauptung gelte für alle $k \leq n$, also $2 \cdot k = 0$ für alle $k \leq n$.
Induktionsschritt: Für $k = n + 1$ gilt $k = a + b$ für zwei natürliche Zahlen $a, b \leq n$. Also ist $2 \cdot (n+1) = 2 \cdot a + 2 \cdot b = 0 + 0 = 0$.

Aufgabe 8: Definition der natürlichen Zahlen

Es ist anschaulich klar, dass die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen die kleinste induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist. In dieser Aufgabe zeigen Sie formal, dass $\mathbb{R}$ tatsächlich eine eindeutige kleinste induktive Teilmenge besitzt. Wir können daher $\mathbb{N}$ als ebendiese kleinste induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$ definieren. Sei dazu $\mathcal{M}$ die Menge aller induktiven Teilmengen $M \subseteq \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

a) $\mathcal{M}$ ist nicht leer.

b) Die Schnittmenge aller induktiven Teilmengen $N := \bigcap_{M \in \mathcal{M}} M$ ist wieder induktiv und somit nicht leer.

c) N ist die kleinste induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$, also $N \subseteq M$ für jedes $M \in \mathcal{M}$.

d) N ist eindeutig bestimmt: falls N' induktiv ist und ebenfalls $N' \subseteq M$ für alle $M \in \mathcal{M}$ erfüllt, so gilt schon $N' = N$.

Aufgabe 9: Folgenkonvergenz

In der Vorlesung wurde definiert:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_\varepsilon \quad |x_n - x| < \varepsilon\,.$$

Welche der folgenden Aussagen liefern äquivalente Definitionen der Folgenkonvergenz? Begründen Sie Ihre Antworten.

a) $\forall \varepsilon \geq 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_\varepsilon \quad |x_n - x| \leq \varepsilon$

b) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_\varepsilon \quad |x_n - x| < \varepsilon$

c) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_\varepsilon \quad |x_n - x| \leq \varepsilon$

Abgabe: Bis spätestens 10.00 Uhr am Montag den 28.10.2013 im Briefkasten von Herrn Teufel (Gebäude C, Raum links vom Eingang in Ebene 3) oder zu Beginn der Vorlesung bis 10.15 Uhr im Hörsaal N9. Die mit $*$ gekennzeichneten Aufgaben bzw. Aufgabenteile müssen nicht schriftlich abgegeben werden.