Prof. Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2013/2014
28.10.2013

Mathematik für Physiker I

Übungsblatt 3

Aufgabe 10: Nullfolgen (4 Punkte)

Zeigen oder widerlegen Sie die Aussage, dass (x_n) eine Nullfolge ist für

a) $x_n = \frac{n+10^6}{n^2+1}$,

b) $x_n = n\, q^n$ mit $|q| < 1$,

c) $x_n = n!\, q^n$ mit $|q| < 1$,

d) $x_n = 1 - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$.

Aufgabe 11: Nützliche Identitäten (4 Punkte)

a) Für $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} .$$

Zeigen Sie diese "geometrische Summenformel" einmal mittels vollständiger Induktion und einmal, indem Sie die Gleichung mit $(1-q)$ multiplizieren und die linke Seite als "Teleskopsumme" lesen.

Was ergibt sich für $n \to \infty$?

b) Zeigen Sie durch direktes Nachrechnen, dass

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=1}^{n} a^{n-k}\, b^{k-1}.$$

Aufgabe 12: Konvergente Folgen (3 Punkte)

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Monotoniekriteriums, dass (x_n) definert durch $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$ und $x_0 > 0$ beliebig für $a > 0$ gegen $\sqrt{a}$ konvergiert.

Tipp: Zeigen Sie zunächst, dass der Grenzwert $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ exisiert. Folgern Sie dann, dass $x^2 = a$ gelten muss!

b) Sei (x_n) eine Nullfolge und (y_n) eine beschränkte Folge. Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.

c) Sei $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Zeigen Sie für alle $m \in \mathbb{N}$, dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt[m]{|x_n|} = \sqrt[m]{|x|}$.

Tipp: Verwenden Sie Aufgabe 11 b)!

Aufgabe 13: Approximation von π (4 Punkte)

a) Seien $0 < a_0 < A_0$. Definiere (a_n) und (A_n) durch

$$A_{n+1} := \frac{2}{1/a_n + 1/A_n} = \frac{2a_nA_n}{a_n + A_n}, \quad a_{n+1} := \sqrt{a_nA_{n+1}}.$$

Zeigen Sie, dass (a_n) monoton wachsend und (A_n) monoton fallend ist und beide denselben Limes haben.

Bemerkung: Wählt man a_0 als den halben Umfang eines in den Einheitskreis einbeschriebenen regelmäßigen m-Ecks und A_0 als den halben Umfang eines umschreibenden regelmäßigen m-Ecks, so ist a_n der halbe Umfang eines einbeschriebenen Polygons mit $m \cdot 2^n$ Ecken und A_n der halbe Umfang des umschreibenden Polygons mit ebenso vielen Ecken. Der Limes beider Folgen ist dann der halbe Umfang des Kreisbogens, also π!

b) Berechnen Sie mit Hilfe von Teil a) ausgehend von $m = 6$, wie schon vor Ihnen Archimedes, jeweils den halben Umfang des in den Einheitskreis ein- bzw. umschriebenen regelmäßigen 96-Ecks bis auf 4 Stellen hinter dem Komma. Machen Sie sich klar, dass die Startwerte $a_0 = 3$ und $A_0 = 2\sqrt{3}$ sind.

Abgabe: Bis spätestens 10.00 Uhr am Montag den 04.11.2013 im Briefkasten von Herrn Teufel (Gebäude C, Raum links vom Eingang in Ebene 3) oder zu Beginn der Vorlesung bis 10.15 Uhr im Hörsaal N9.