Prof. Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2013/2014
04.11.2013

Mathematik für Physiker I

Übungsblatt 4

Aufgabe 14: Die b-adische Entwicklung (4 Punkte)

a) Sei $0, x_1 x_2 x_3 ...$ die b-adische Entwicklung von $x \in (0,1)$, also $b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und

$$x_1 = \max\left\{ k \in \{0,1,...,b-1\} \,\middle|\, k\, b^{-1} < x \right\},$$
$$x_{n+1} = \max\left\{ k \in \{0,1,...,b-1\} \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} x_j\, b^{-j} + k\, b^{-j-1} < x \right\}.$$

Zeigen Sie mit dem Cauchy-Kriterium, dass die Folge (a_n) gegeben durch $a_n := \sum_{j=1}^{n} x_j\, b^{-j}$ konvergiert.

b) Bestimmen Sie die Dualentwicklung ($b = 2$) von $x = \frac{1}{3}$. Berechnen Sie dazu zunächst die ersten Stellen von Hand und beweisen Sie dann die sich ergebende Vermutung.

Tipp: Verwenden Sie Aufgabe 11 a)!

Aufgabe 15: Beschränkte Mengen (4 Punkte)

a) Besitzen die folgenden Mengen Minimum, Maximum, Infimum, Supremum? Bestimmen Sie diese gegebenenfalls und begründen Sie Ihre Antwort!
   (a) $M_1 := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 > 7\}$,
   (b) $M_2 := \{(-1)^n(1 - \frac{1}{n}) \,|\, n \in \mathbb{N}\}$,
   (c) $M_3 := \{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \,|\, m, n \in \mathbb{N}\}$.

b) Sei (x_n) eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$ und $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Zeigen Sie, dass die Menge $M := \{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ beschränkt ist und ihr Infimum und ihr Supremum annimmt, also ein Minimum und ein Maximum besitzt.

Aufgabe 16: Injektivität und Surjektivität (4 Punkte)

a) Welche der folgenden Funktionen sind injektiv, welche surjektiv, welche beides?
   (a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$,
   (b) $f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x^3$,
   (c) $f_3 : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $x \mapsto x^2$,
   (d) $f_4 : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $n \mapsto 1/n$.

b) Geben Sie eine Bijektion $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ an und skizzieren Sie den Graphen!

Abgabe: Bis spätestens 10.00 Uhr am Montag den 11.11.2013 im Briefkasten von Herrn Teufel (Gebäude C, Raum links vom Eingang in Ebene 3) oder zu Beginn der Vorlesung bis 10.15 Uhr im Hörsaal N9.