

MATHEMATIK FÜR PHYSIKER I

Übungsblatt 5

Aufgabe 17: Die Exponentialfunktion (4 Punkte)

- a) Folgern Sie aus dem Exponentialgesetz, dass für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \quad \text{und} \quad \exp(x) > 0 \quad \text{gilt.}$$

- b) Zeigen Sie für $n \geq 2$, dass

$$e(n/e)^n < n! < ne(n/e)^n.$$

Multiplizieren Sie dazu jeweils die aus der Vorlesung bekannten Ungleichungen

$$\begin{aligned} (1 + 1/k)^k &< e && \text{für } k = 1, \dots, n-1 \quad \text{bzw.} \\ e &< (1 - 1/k)^{-k} && \text{für } k = 2, \dots, n \end{aligned}$$

auf!

Aufgabe 18: Stetige Funktionen (2 Punkte)

Seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Zeigen Sie, dass

- a) das Produkt $f \cdot g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)g(x)$ stetig ist,
b) die Verknüpfung $f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(g(x))$ stetig ist.

Aufgabe 19: Stetige Funktionen und Bolzano-Weierstraß (4 Punkte)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- a) f ist beschränkt. (Eine Funktion mit Werten in \mathbb{R} heißt beschränkt, wenn $\text{Bild} f$ eine beschränkte Teilmenge von \mathbb{R} ist.)
b) f nimmt ihr Infimum und ihr Supremum an, d.h. es gibt $x_{\min}, x_{\max} \in [a, b]$ mit

$$f(x_{\min}) = \inf_{[a,b]} f := \inf\{f(x) \mid x \in [a, b]\} \quad \text{und} \quad f(x_{\max}) = \sup_{[a,b]} f.$$

Tipp: Lesen Sie die Überschrift zur Aufgabe und versuchen Sie bei (a) einen Widerspruchsbeweis.

Aufgabe 20: Zwischenwertsatz (2 Punkte)

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- a) Seien $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(0) > g(0)$ und $f(1) < g(1)$. Dann gibt es ein $x \in (0, 1)$ mit $f(x) = g(x)$.
b) Sei $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ stetig. Dann hat f einen Fixpunkt, d.h. es existiert ein $x \in [0, 1]$ mit $f(x) = x$.

Abgabe: Bis spätestens 10.00 Uhr am Montag den 18.11.2013 im Briefkasten von Herrn Teufel (Gebäude C, Raum links vom Eingang in Ebene 3) oder zu Beginn der Vorlesung bis 10.15 Uhr im Hörsaal N9.