Prof. Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2013/2014
22.11.2013

Mathematik für Physiker I

Übungsblatt 7

Aufgabe 25: Komplexe Zahlen (3 Punkte)

a) Sei $z \in \mathbb{C}$ mit Realteil x und Imaginärteil y, also $z = x + \mathrm{i}y$. Zeigen Sie, dass gilt
   (i) $|z|^2 \;=\; z \cdot \overline{z}$,
   (ii) $\operatorname{Re} z \;=\; (z + \overline{z})/2, \quad \operatorname{Im} z \;=\; (z - \overline{z})/(2\mathrm{i})$,
   (iii) $|\operatorname{Re} z| \;\leq\; |z|, \quad |\operatorname{Im} z| \;\leq\; |z|$,

b) Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ und $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$. Zeigen Sie, dass gilt
   (i) $\overline{z_1 + z_2} \;=\; \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 z_2} \;=\; \overline{z_1}\,\overline{z_2}$,
   (ii) $|z_1 z_2| \;=\; |z_1| \cdot |z_2|$.
   (iii) $z_1/z_2 \;=\; (z_1\overline{z_2})/|z_2|^2$.

c) Berechnen Sie Realteil, Imaginärteil und Betrag von $z \;=\; \dfrac{3+4\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}} \;+\; \dfrac{2-\mathrm{i}}{2-3\mathrm{i}}$.

Aufgabe 26: Polardarstellung komplexer Zahlen (4 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Polardarstellung von
   (i) $z_1 \;=\; \mathrm{i} + 1\,,$ (ii) $z_2 \;=\; \sqrt{3} + \mathrm{i}\,.$

   Berechnen Sie dann $z_1^2\,\overline{z_2}^3$ einmal direkt und einmal unter Verwendung der Polardarstellung.

b) Bestimmen Sie alle fünften Wurzeln von i und alle dritten Wurzeln von $\frac{27}{\sqrt{2}}(-1+\mathrm{i})$.

c) Was ist falsch an folgender Rechnung? Erläutern Sie!

$$-1 \;=\; \mathrm{i} \cdot \mathrm{i} \;=\; \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} \;=\; \sqrt{(-1)(-1)} \;=\; \sqrt{1} \;=\; 1.$$

Aufgabe 27: Sinus und Kosinus im Komplexen (4 Punkte)

a) Die Funktionen $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert man durch

$$\cos(z) \;:=\; (\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})/2, \quad \sin(z) \;:=\; (\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})/(2\mathrm{i}).$$

   (i) Bestimmen Sie alle Nullstellen von cos und sin in $\mathbb{C}$.
   (ii) Zeigen Sie, dass die Additionstheoreme auf ganz $\mathbb{C}$ gelten.

b) Weiterhin definiert man die Hyperbelfunktionen $\cosh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $\sinh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch

$$\cosh(z) \;:=\; \cos(\mathrm{i}z), \quad \sinh(z) \;:=\; \sin(\mathrm{i}z)/\mathrm{i}.$$

   (i) Was ergibt sich für $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im} z = 0$? Wie sehen also Hyperbelfunktionen auf $\mathbb{R}$ aus?
   (ii) Berechnen Sie $\cosh^2(z) - \sinh^2(z)$.

Aufgabe 28: Folgen komplexer Zahlen (3 Punkte)

Eine Folge (z_n) in $\mathbb{C}$ heißt kovergent gegen $z \in \mathbb{C}$, falls

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \;\; \forall\, n \geq n_\varepsilon : \; |z_n - z| \, < \, \varepsilon.$$

Sie heißt Cauchyfolge, falls

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \;\; \forall\, n, m \geq n_\varepsilon : \; |z_n - z_m| \, < \, \varepsilon.$$

Zeigen Sie:

a) Eine Folge (z_n) in $\mathbb{C}$ ist genau dann kovergent gegen $z = x + \mathrm{i}y$, wenn die Folge $(x_n) = (\operatorname{Re} z_n)$ der Realteile gegen $x = \operatorname{Re} z$ und die Folge $(y_n) = (\operatorname{Im} z_n)$ der Imaginärteile gegen $y = \operatorname{Im} z$ kovergiert (im Sinne reeller Folgen).

b) Jede beschränkte Folge (z_n) in $\mathbb{C}$, also $|z_n| < C$ für ein $C \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$, hat einen Häufungspunkt.

c) Jede Cauchyfolge (z_n) in $\mathbb{C}$ konvergiert gegen ein $z \in \mathbb{C}$. Es ist also $\mathbb{C}$ vollständig.

Tipp: Verwenden Sie Aufgabe 25 a) iii) sowie die entsprechenden Sätze aus dem Reellen!

Abgabe: Bis spätestens 10.00 Uhr am Montag den 02.12.2013 im Briefkasten von Herrn Teufel (Gebäude C, Raum links vom Eingang in Ebene 3) oder zu Beginn der Vorlesung bis 10.15 Uhr im Hörsaal N9.