Prof. Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2013/2014
29.11.2013

Mathematik für Physiker I

Übungsblatt 8

Aufgabe 29: Inversion und Cayley-Transformation (4 Punkte)

a) Die Inversion der komplexen Ebene ist gegeben durch

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}\,, \quad z \mapsto \frac{1}{z}.$$

Skizzieren und erläutern Sie, was diese Abbildung geometrisch macht, indem Sie einerseits das Bild der oberen Halbebene $H_+ := \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im} z > 0\}$ und andererseits das Bild der Einheitskreisscheibe $B_1(0) := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$ unter der Abbildung f betrachten.

b) Die Cayley-Transformation der komplexen Ebene ist gegeben durch

$$g : \mathbb{C} \setminus \{-\mathrm{i}\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}.$$

Zeigen Sie, dass g die obere Halbebene H_+ in die Einheitskreischeibe $B_1(0)$ abbildet, sowie die reelle Achse $\mathbb{R}$ in den Einheitskreis $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$.

Aufgabe 30: Komplexe Polynome (4 Punkte)

a) Seien $a, b, c \in \mathbb{C}$. Faktorisieren Sie die folgenden Polynome vollständig:
   (i) $p_1(z) \;=\; z^4 - 1,$
   (ii) $p_2(z) \;=\; az^2 + bz + c.$

b) Zeigen Sie: Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ Nullstelle von $p(z) = a_0 + ... + a_n z^n$ mit $a_j \in \mathbb{R}$ für alle j, so ist auch $\overline{\lambda}$ Nullstelle von $p(z)$.

c) Zeigen Sie, dass jedes reelle Polynom in reelle Polynome vom Grad kleiner oder gleich zwei zerfällt, d.h. sich als Produkt solcher Polynome schreiben lässt.

Aufgabe 31: Konvergenz von Reihen (3 Punkte)

Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{C}$ und die Partialsummenfolge $s_m = \sum_{n=1}^{m} |a_n|$ der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sei beschränkt. Zeigen Sie:

a) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

b) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert. (Also sind absolut konvergente Reihen auch konvergent.)

c) Sei (b_n) eine Folge in $\mathbb{C}$ mit $|b_n| \leq |a_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert.

Tipp: Verwenden Sie für a) das Monotoniekriterium für Folgen und für b) das Cauchy-Kriterium für Folgen sowie a)!

Aufgabe 32: Konvergente Reihen? (5 Punkte)

Für welche der Folgen (x_n) und welche $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$? Begründen Sie Ihre Antwort, wobei Sie alle Resultate aus der Vorlesung verwenden können.

a) $x_n = 1/n^{\alpha}$,

b) $x_n = \frac{(-1)^n n^2 + n}{n^3}$,

c) $x_n = \binom{5n}{4n}^{-1}$,

d) $x_n = (\alpha + 1/n)^n$,

e) $x_n = \big((n+1)\ln(n+1)\big)^{-1}$.

Aufgabe 33: Konvergente Reihen! $*$ (4 Zusatzpunkte)

Zeigen Sie:

a) Konvergieren die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2$ mit $a_n, b_n \in \mathbb{C}$, so konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n} b_n$ und es gilt

$$\Big| \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n} b_n \Big| \le \frac{1}{2} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 \Big).$$

b) Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$, so konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n$.

Abgabe: Bis spätestens 10.00 Uhr am Montag den 09.12.2013 im Briefkasten von Herrn Teufel (Gebäude C, Raum links vom Eingang in Ebene 3) oder zu Beginn der Vorlesung bis 10.15 Uhr im Hörsaal N9.