Prof. Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2013/2014
06.12.2013

Mathematik für Physiker I

Übungsblatt 9

Aufgabe 34: Konvergenzradien (4 Punkte)

Bestimmen Sie für die folgenden Potenzreihen jeweils den Konvergenzradius.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(n) \mathrm{e}^n z^n$,

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$.
Tipp: Verwenden Sie Aufgabe 17 b) von Übungsblatt 5!

Aufgabe 35: Doppelreihen (4 Punkte)

a) Sei $|z| < 1$. Zeigen Sie mit Hilfe des Produktsatzes, dass gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n \;=\; 1/(1-z)^2.$$

b) Zeigen Sie mit Hilfe des Umordnungsatzes, dass $\sum_{m,n=1}^{\infty} 1/(m^2 + n^2)$ divergiert, jedoch $\sum_{m,n=1}^{\infty} 1/(m^3 + n^3)$ konvergiert.

Aufgabe 36: Limes superior und limes inferior (4 Punkte)

a) Bestimmen Sie $\liminf$ und $\limsup$ der Folgen
   (i) $x_n \;=\; (-1)^n$,
   (ii) $y_n \;=\; \big(1 + (-1)^n/n\big)^n$.

b) Sei (x_n) eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ und

$$x^* \;:=\; \limsup_{n\to\infty} x_n, \quad x_* \;:=\; \liminf_{n\to\infty} x_n.$$

Zeigen Sie

(i) Die Folge (x_n) konvergiert genau dann, wenn $x^* = x_*$ und in diesem Fall gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n \;=\; x^* \;=\; x_*.$$

(ii) Es gilt

$$\begin{aligned} x^* &= \lim_{n\to\infty} \sup\{x_k \,|\, k \geq n\}, \\ x_* &= \lim_{n\to\infty} \inf\{x_k \,|\, k \geq n\}. \end{aligned}$$

Tipp: Zeigen Sie zunächst, dass die Folgen $(\sup\{x_k \,|\, k \geq n\})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\inf\{x_k \,|\, k \geq n\})_{n\in\mathbb{N}}$ tatsächlich konvergieren. Prüfen Sie dann jeweils, dass der Grenzwert sowohl $\leq$ als auch $\geq$ der linken Seite ist. Es genügt, wenn Sie den Beweis einer der beiden Aussagen ausführlich aufschreiben.

Aufgabe 37: Offene und abgeschlossene Mengen (4 Punkte)

a) Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$ sind offen, abgeschlossen bzw. kompakt? Begründen Sie Ihre Antwort!

(i) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re} z \in (0,1), \mathrm{Im} z = 0\}$,

(ii) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re} z \in [0,1], \mathrm{Im} z = 0\}$,

(iii) $H_+ := \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im} z > 0\}$,

(iv) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |\mathrm{Im} z| \leq |\mathrm{Re} z|\}$.

b) Sei $\{O_n \subset \mathbb{R} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ eine Folge von offenen sowie $\{A_n \subset \mathbb{R} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ eine Folge von abgeschlossenen Mengen in $\mathbb{R}$. Welche der folgenden Mengen sind stets offen, welche abgeschlossen, welche im Allgemeinen keines von beidem?

(i) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n$,

(ii) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$,

(iii) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$,

(iv) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Tipp: Überlegen Sie sich die Antwort an Hand von Intervallen und prüfen Sie dann, dass dies auch im Allgemeinen so ist.

Abgabe: Bis spätestens 10.00 Uhr am Montag den 16.12.2013 im Briefkasten von Herrn Teufel (Gebäude C, Raum links vom Eingang in Ebene 3) oder zu Beginn der Vorlesung bis 10.15 Uhr im Hörsaal N9.