Stefan Teufel, Stefan Haag
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2013/14
17.10.2013

Mathematische Physik: Quantenmechanik

Übungsblatt 1

Aufgabe 1: Integrale mit Parameter

Zeigen Sie folgenden Satz: Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f \colon \mathbb{R}^d \times \Gamma \to \mathbb{C}$ so, dass $f(x,\gamma) \in L^1(\mathbb{R}^d_x)$ für jedes feste $\gamma \in \Gamma$. Setze $I(\gamma) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x,\gamma)\,\mathrm{d}x$.

(a) Falls die Abbildung $\gamma \mapsto f(x,\gamma)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$ stetig ist und es eine Funktion $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ gibt mit $\sup_{\gamma\in\Gamma} |f(x,\gamma)| \le g(x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$, dann ist auch $I(\gamma)$ stetig.

(b) Falls die Abbildung $\gamma \mapsto f(x,\gamma)$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ stetig differenzierbar ist und es eine Funktion $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ gibt mit $\sup_{\gamma\in\Gamma} |\partial_\gamma f(x,\gamma)| \le g(x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$, dann ist auch $I(\gamma)$ stetig differenzierbar und es gilt

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\gamma}(\gamma) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\gamma}\int_{\mathbb{R}^d} f(x,\gamma)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial}{\partial\gamma} f(x,\gamma)\,\mathrm{d}x\,.$$

Tipp: Verwenden Sie den Satz der dominierten Konvergenz von Lebesgue.

Aufgabe 2: Partielle Integration in L^1

Sei $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$ mit $f' \in L^1(\mathbb{R})$.

(a) Zeigen Sie, dass $f \in C_\infty(\mathbb{R})$.

(b) Zeigen Sie, dass man für $g \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$ mit $g' \in L^\infty(\mathbb{R})$ partiell integrieren kann, d.h.

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) f'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}} g'(x) f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

(c) Folgern Sie, dass $\widehat{f'}(k) = \mathrm{i}k\widehat{f}(k)$ gilt.

Aufgabe 3: Glattheit und Abfall der Fouriertransformierten

Sei $\ell \in \mathbb{N}$ und $f \in L^1(\mathbb{R})$. Geben Sie jeweils hinreichende und möglichst schwache Bedingungen für f an, die implizieren,

(a) dass $\hat{f} \in C^\ell(\mathbb{R})$,

(b) dass $\sup_{k\in\mathbb{R}} \big|\, |k|^\ell \hat{f}(k) \,\big| < \infty$,

(c) dass $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

Aufgabe 4: Fouriertransformierte einer Gaußfunktion

Sei $a \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\, a > 0$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiert durch $f(x) := \mathrm{e}^{-ax^2/2}$. Zeigen Sie, dass $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt und $\hat{f}$ gegeben ist durch

$$\hat{f}(k) \;=\; a^{-1/2}\,\mathrm{e}^{-\frac{k^2}{2a}}.$$

Abgabe: Wird in der ersten Vorlesung festgelegt.