Stefan Teufel, Stefan Haag
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2013/14
17.12.2013

Mathematische Physik: Quantenmechanik

Übungsblatt 10

Aufgabe 36: Trotter-Produktformel (2 Punkte)

Seien $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ und $t \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass es ein von n unabhängiges $C < \infty$ gibt, sodass
$$\left\| \mathrm{e}^{(A+B)t} - \left(\mathrm{e}^{At/n} \mathrm{e}^{Bt/n} \right)^n \right\| \;\leq\; C/n.$$

b) Zeigen Sie, dass es ein von n unabhängiges $C < \infty$ gibt, so dass
$$\left\| \mathrm{e}^{(A+B)t} - \left(\mathrm{e}^{Bt/(2n)} \mathrm{e}^{At/n} \mathrm{e}^{Bt/(2n)} \right)^n \right\| \;\leq\; C/n^2.$$

Hinweis: Exponentialreihe für beschränkte Operatoren.

Aufgabe 37: Weyls Kriterium (3 Punkte)

Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum und $(H, D(H))$ ein selbstadjungierter Operator. Zeigen Sie mit Hilfe der Multiplikationsoperator-Version des Spektralsatzes: $\lambda \in \sigma(H)$ genau dann, wenn eine Folge (ψ_n) in $D(H)$ existiert mit
$$\|\psi_n\| = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \|H\psi_n - \lambda\psi_n\|_{\mathcal{H}} \;=\; 0.$$

Aufgabe 38: Konvergenz des Spektrums (3 Punkte)

Sei $(A, D(A))$ ein selbstadjungierter Operator und $(A_n, D(A_n))_n$ eine Folge selbstadjungierter Operatoren die im starken Resolventen Sinne gegen $(A, D(A))$ konvergiert (vgl. Aufgabe 35).

a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $\mu = (a+b)/2 + \mathrm{i}(b-a)/2$. Zeigen Sie, dass $(a, b) \subset \rho(A)$ genau dann, wenn $\|R_\mu(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \sqrt{2}/(b-a)$.

b) Sei $N \in \mathbb{N}$ und $(a, b) \subset \rho(A_n)$ für alle $n \geq N$. Zeigen Sie mittels a), dass auch $(a, b) \subset \rho(A)$. Folgern Sie daraus, dass es zu jedem $\lambda \in \sigma(A)$ eine Folge (λ_n) gibt mit $\lambda_n \in \sigma(A_n)$ und
$$\lambda_n \to \lambda \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Aufgabe 39: Konvergenz von Resolventenmenge und Spektralprojektionen (3 Punkte)

Sei $(A, D(A))$ ein selbstadjungierter Operator und $(A_n, D(A_n))_n$ eine Folge selbstadjungierter Operatoren die im Norm-Resolventen Sinne gegen $(A, D(A))$ konvergiert. Zeigen Sie:

a) Falls $(a, b) \subset \rho(A)$, dann gibt es zu jedem hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $(a + \varepsilon, b - \varepsilon) \subset \rho(A_n)$ für $n \geq N$. Weiterhin gilt
$$\lim_{n\to\infty} \|R_x(A_n) - R_x(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \;=\; 0 \qquad \text{für alle } x \in (a, b).$$

b) Für $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \cap \rho(A)$ mit $x_1 < x_2$ gilt
$$\lim_{n\to\infty} \|\mathbf{1}_{(x_1,x_2)}(A_n) - \mathbf{1}_{(x_1,x_2)}(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \;=\; 0.$$

Hinweis: Verwenden Sie a) und die Aufgabe 35!

Abgabe: Dienstag den 07.01.2014, in der Vorlesung.