Stefan Teufel, Stefan Haag
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2013/14
07.01.2014

Mathematische Physik: Quantenmechanik

Übungsblatt 11

Aufgabe 40: Skalarprodukt auf dem Tensorprodukt (3 Punkte)
Seien $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ Hilberträume. Wir betrachten die Menge

$$\mathrm{span}(\otimes) \ := \ \mathrm{span}^{\mathbb{C}}\{\psi_1 \otimes \psi_2 \,|\, \psi_1 \in \mathcal{H}_1, \psi_2 \in \mathcal{H}_2\}.$$

Zeigen Sie, dass für $\varphi = \sum_i c_i \varphi_{1i} \otimes \varphi_{2i} \in \mathrm{span}(\otimes)$ und $\psi = \sum_j d_j \psi_{1j} \otimes \psi_{2j} \in \mathrm{span}(\otimes)$ der Ausdruck

$$\langle \varphi, \psi \rangle_\otimes \ := \ \sum_{i,j} \overline{c_i} d_j \langle \varphi_{1i}, \psi_{1j} \rangle_{\mathcal{H}_1} \langle \varphi_{2i}, \psi_{2j} \rangle_{\mathcal{H}_2}$$

nicht von der Wahl der Linearkombination abhängt und ein Skalarprodukt definiert. Den Abschluss von $\mathrm{span}(\otimes)$ unter der von diesem Skalarprodukt induzierten Norm bezeichnen wir mit $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.

Aufgabe 41: Integration von PVMs (6 Punkte)
Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und $P : \mathcal{A} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ein Projektor-wertiges Maß.

(a) Zeigen Sie, dass für $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \cap B = \emptyset$ gilt $P(A)P(B) = 0$.
Folgern Sie daraus, dass für beliebige $A, B \in \mathcal{A}$ gilt $P(A)P(B) = P(A \cap B)$.

(b) Für einfache Funktionen $f = \sum_{j=1}^m \alpha_j \chi_{A_j}$, $A_j \in \mathcal{A}$ und $\alpha_j \in \mathbb{C}$, definiert man

$$\int_\Omega f \mathrm{d}P := \sum_{j=1}^m \alpha_j P(A_j)\,.$$

Zeigen Sie, dass $\int f \mathrm{d}P$ wohldefiniert ist, also nicht von der Darstellung der einfachen Funktion abhängt.

(c) Zeigen Sie, dass für jede einfache Funktion $f = \sum_{j=1}^m \alpha_j \chi_{A_j}$, $A_j \in \mathcal{A}$, $\alpha_j \in \mathbb{C}$, gilt

$$\left\| \int_\Omega f \mathrm{d}P \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} := \left\| \sum_{j=1}^m \alpha_j P(A_j) \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \|f\|_\infty\,.$$

(d) Für beschränkte Borelfunktionen f definiert man nun das Integral bezüglich P wie folgt: sei (f_n) eine Folge einfacher Funktionen, die gleichmäßig gegen f konvergiert (machen Sie sich klar, dass so eine Folge immer existiert!). Dann ist

$$\int_\Omega f \mathrm{d}P := \lim_{n \to \infty} \int_\Omega f_n \mathrm{d}P\,.$$

Verwenden Sie (c) um zu zeigen, dass der Grenzwert in der Operatornorm existiert und nicht von der gewählten Folge (f_n) abhängt.

Aufgabe 42: Beispiel für ein POVM (3 Punkte)
Ein Apparat zur Messung des Ortes eines Teilchens habe selbst eine Ungenauigkeit, beschrieben durch eine Funktion $p \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ mit $p \geq 0$ und $\|p\|_1 = 1$. Genauer habe die Verteilung der "gemessenen" Orte bei Vorliegen der Wellenfunktion $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ die Dichte

$$\rho_p^\psi(x) := \int_{\mathbb{R}} p(x-y)\,|\psi(y)|^2\,\mathrm{d}y\,.$$

Die Anzeige X des Apparats streut also mit der Verteilung p um den tatsächlichen Ort Y und für einen idealen Apparat müsste $p = \delta$ gelten. Bestimmen Sie das zu dieser ungenauen Messung gehörige POVM

$$E_p : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))\,.$$

Es muss also gelten, dass

$$\mathbb{P}^\psi(X_p \in A) := \int_A \rho_p^\psi(x)\,\mathrm{d}x = \langle \psi, E_p(A)\psi\rangle \quad \text{für alle } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).\ \ .$$

Ist E_p ein PVM?

Welchen Operator liefert die Integration diese POVMs, was ist also $\int_{\mathbb{R}} \lambda\,\mathrm{d}E_p$?

Abgabe: Dienstag den 14.01.2014, in der Vorlesung.