Stefan Teufel, Stefan Haag
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2013/14
21.01.2014

Mathematische Physik: Quantenmechanik

Übungsblatt 12

Aufgabe 43: Zerlegung von Operatoren (3 Punkte)

Sei $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ein beschränkter Operator auf einem Hilbertraum. Zeigen Sie:

a) A lässt sich als Linearkombination zweier selbstadjungierter Operatoren schreiben.

b) A lässt sich als Linearkombination von vier unitären Operatoren schreiben.

Tipp: (a) ist leicht und für (b) hilft (a) und ein Blick auf die komplexe Ebene.

Aufgabe 44: Der Raum der kompakten Operatoren (3 Punkte)

Seien V und W Banachräume. Zeigen Sie, dass die Menge der kompakten Operatoren $\mathcal{K}(V,W)$ ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{L}(V,W)$ ist, also insbesondere, dass jede in der Operatornorm konvergente Folge (K_n) kompakter Operatoren $K_n \in \mathcal{K}(V,W)$ gegen einen kompakten Operator konvergiert.
Tipp: Diagonalfolgenargument!

Aufgabe 45: Die Spur positiver Operatoren (2 Punkte)

Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum mit einer ONB (ϕ_n). Für jeden positiven Operator $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ist die Spur $\mathrm{tr}(A)$ definiert durch

$$\mathrm{tr}(A) := \sum_{n=1}^{\infty} \langle \phi_n, A\phi_n \rangle \,.$$

Zeigen Sie:

a) $\mathrm{tr}(A)$ ist unabhängig von der Wahl der ONB (ϕ_n).

b) $\mathrm{tr}(UAU^{-1}) = \mathrm{tr}(A)$ für jede unitäre Abbildung $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

c) $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$ und $\mathrm{tr}(\lambda A) = \lambda \mathrm{tr}(A)$ für alle positiven $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ und $\lambda \geq 0$.

d) Falls $0 \leq A \leq B$ (d.h. $B - A$ ist positiv), dann gilt $\mathrm{tr}(A) \leq \mathrm{tr}(B)$.

Aufgabe 46: Essentielles und diskretes Spektrum (3 Punkte)

Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum und $(H, D(H))$ ein selbstadjungierter Operator. Das Spektrum von H ist die disjunkte Vereinigung der Mengen

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(H) := \{\lambda \in \sigma(H) \,|\, \text{Das Bild von } \chi_{(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)}(H) \text{ ist unendlichdimensional für alle } \varepsilon > 0\}$$
$$\sigma_{\mathrm{disc}}(H) := \{\lambda \in \sigma(H) \,|\, \text{Das Bild von } \chi_{(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)}(H) \text{ ist endlichdimensional für ein } \varepsilon > 0\}\,,$$

des essentiellen und des diskreten Spektrums.

Zeigen Sie das verfeinerte Weyl-Kriterium: Es ist $\lambda \in \sigma_{\mathrm{ess}}(H)$ genau dann, wenn eine Orthonormalfolge (ψ_n) in $D(H)$ existiert mit

$$\lim_{n\to\infty} \|(H-\lambda)\psi_n\|_{\mathcal{H}} \;=\; 0.$$

Aufgabe 47: Der Raum der Spurklasse Operatoren (5 Punkte)
Ein Operator $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ heißt Spurklasse, falls $\mathrm{tr}(|A|) < \infty$. Hier ist $|A| := \sqrt{(A^*A)}$, wobei die Wurzel durch den Funktionalkalkül für den positiven selbstadjungierten Operator $B := A^*A$ definiert ist. Die Menge $\mathscr{I}_1(\mathcal{H})$ der Spurklasse Operatoren ist mit der Norm $\|A\|_1 := \mathrm{tr}(|A|)$ ein Banachraum (das ist in der Aufgabe nicht zu zeigen). Zeigen Sie:

a) Für $A \in \mathscr{I}_1(\mathcal{H})$ ist $\sigma(|A|) \subset \sigma_{\mathrm{disc}}(|A|) \cup \{0\}$ und $\mathrm{tr}(|A|)$ ist gleich der Summe der Eigenwerte von $|A|$.

b) Für alle $A \in \mathscr{I}_1(\mathcal{H})$ gilt $\|A\| \leq \|A\|_1$.

c) $\mathscr{I}_1(\mathcal{H}) \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$.

d) Für $A \in \mathscr{I}_1(\mathcal{H})$ und $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ sind AB und BA in $\mathscr{I}_1(\mathcal{H})$.
Tipp: Hier kann man 43 (b) verwenden.

Abgabe: Dienstag den 28.01.2014, in der Vorlesung.