Stefan Teufel, Stefan Haag
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2013/14
22.10.2013

Mathematische Physik: Quantenmechanik

Übungsblatt 2

Aufgabe 5: Dilatationen (3 Punkte)

Sei $p \in [1, \infty)$, $\sigma > 0$ und $D^p_\sigma : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $f(x) \mapsto (D^p_\sigma f)(x) := \sigma^{-d/p} f(x/\sigma)$ die L^p-Dilatation um σ.

a) Zeigen Sie, dass $D^p_\sigma : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ stetig und $\|D^p_\sigma f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$ ist.

Erinnerung: Die L^p-Norm ist $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} := \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p \, \mathrm{d}x\right)^{1/p}$.

b) Berechnen Sie $\mathcal{F} D^2_\sigma f$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

c) Wie muss man $\tilde{D}^p_\sigma : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ definieren, wenn man D^p_σ fortsetzen will?

Aufgabe 6: Faltung (3 Punkte)

Sei $f \in C(\mathbb{R}^d)$ beschränkt und $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ mit $\varphi \geq 0$ und $\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = 1$. Setze $f_\sigma := f * (D^1_\sigma \varphi)$, wobei D^1_σ die L^1-Dilatation aus Aufgabe 5 ist.

a) Zeigen Sie, dass $f_\sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ ist.

b) Zeigen Sie, dass $f_\sigma(x) \xrightarrow{\sigma \to 0} f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$.

c) Zeigen Sie, dass die Konvergenz in b) auf jedem Kompaktum gleichmäßig ist. Sie dürfen sich dabei die Arbeit erleichtern, indem Sie $\varphi \in C^\infty_0(\mathbb{R}^d)$ annehmen.

Aufgabe 7: Wärmeleitungsgleichung (4 Punkte)

a) Sei $\psi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Bestimmen Sie die Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t \psi(t,x) &= \Delta_x \psi(t,x) && \text{für alle } (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^d, \\ \psi(0,x) &= \psi_0(x) && \text{für alle } x \in \mathbb{R}^d \end{aligned}$$

mit Hilfe der Fouriertransformation und geben Sie sie in der Form

$$\psi(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(t, x-y) \psi_0(y) \, \mathrm{d}y \tag{1}$$

mit einer expliziten Funktion $K : (0,\infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ an.

b) Sei nun $\psi_0 \in C(\mathbb{R}^d)$ beschränkt. Zeigen Sie, dass durch (1) eine beschränkte Funktion $\psi \in C^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R}^d)$ definiert wird, welche die Wärmeleitungsgleichung auf $(0,\infty) \times \mathbb{R}^d$ löst. Zeigen Sie weiterhin, dass ψ bei $t = 0$ durch ψ_0 stetig fortsetzbar ist, d.h. $\lim_{t \to 0} \psi(t,x) = \psi_0(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$.

Tipp: Verwenden Sie Aufgabe 6!

Aufgabe 8: Ableitungen der Heavyside-Distribution (2 Punkte)
Sei $\Theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die sogenannte Heavyside-Funktion, d.h.

$$\Theta(x) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{für } \; x \geq 0, \\ 0 & \text{für } \; x < 0, \end{cases}$$

und T_Θ die zugehörige Distribution. Berechnen Sie die distributionellen Ableitungen von T_Θ zu beliebiger Ordnung.

Abgabe: Dienstag den 29.10.2013, zu Beginn der Vorlesung.