Stefan Teufel, Stefan Haag
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2013/14
29.10.2013

Mathematische Physik: Quantenmechanik

Übungsblatt 3

Aufgabe 9: Operatornorm (3 Punkte)

Zeigen Sie folgenden Satz aus der Vorlesung:

Die Menge $\mathcal{L}(X,Y)$ der linearen beschränkten Operatoren von X nach Y ist mit der Norm

$$\|L\|_{\mathcal{L}(X,Y)} := \sup_{\|x\|_X = 1} \|Lx\|_Y$$

selbst ein normierter Raum. Falls Y vollständig ist, ist auch $\mathcal{L}(X,Y)$ vollständig, also ein Banachraum.

Tipp: Tüfteln Sie entweder selbst oder schauen Sie in ein Buch zur Funktionalanalysis.

Aufgabe 10: Multiplikationsoperatoren auf L^p (3 Punkte)

Sei $V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ messbar und $1 \leq p \leq \infty$. Zeigen Sie, dass V genau dann einen stetige Multiplikationsoperator

$$M_V : L^p(\mathbb{R}^d) \to L^p(\mathbb{R}^d)\,, \quad \psi \mapsto V\psi\,,$$

definiert, wenn $V \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ gilt. Zeigen Sie weiterhin, dass dann

$$\|M_V\|_{\mathcal{L}(L^p)} = \|V\|_\infty\,.$$

Hinweis: Falls Sie den Raum $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ nicht aus Ihren Grundvorlesungen kennen, lösen Sie die Aufgabe für stetiges $V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Ein solches V liegt genau dann in $L^\infty(\mathbb{R}^d)$, falls es beschränkt ist.

Aufgabe 11: Riemann-Lebesgue-Lemma (3 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass $C_\infty(\mathbb{R}^d)$ mit der Supremumsnorm ein Banachraum ist. Verwenden Sie dabei, dass der Raum der stetigen beschränkten Funktionen $C_\mathrm{b}(\mathbb{R}^d)$ mit der Supremumsnorm ein Banachraum ist.

   Erinnerung: $C_\infty(\mathbb{R}^d)$ ist der Raum der abfallenden stetigen Funktionen,

$$C_\infty(\mathbb{R}^d) := \{f \in C(\mathbb{R}^d) \mid \lim_{R\to\infty} \sup_{|x|>R} |f(x)| = 0\}\,.$$

b) Zeigen Sie das Lemma von Riemann-Lebesgue:

$$\mathcal{F}L^1(\mathbb{R}^d) \;\subset\; C_\infty(\mathbb{R}^d).$$

   Zeigen Sie dazu zunächst die Stetigkeit von $\mathcal{F} : (\mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \|\,.\,\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}) \to C_\infty(\mathbb{R}^d)$. Nutzen Sie dann die Dichtheit von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ in $L^1(\mathbb{R}^d)$ und Satz 3.20 aus der Vorlesung, um $\mathcal{F}$ stetig auf L^1 fortzusetzen. Warum stimmt diese Fortsetzung mit dem durch die übliche Formel gegebenen $\mathcal{F}$ auf ganz L^1 überein?

Aufgabe 12: Charakterisierung von Orthonormalbasen (3 Punkte)

Zeigen Sie: Eine Orthonormalfolge (φ_j) in $\mathcal{H}$ ist genau dann eine Orthonormalbasis, wenn gilt:

$$\langle \varphi_j, \psi \rangle = 0 \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \psi = 0\,.$$

Abgabe: Dienstag den 05.11.2013, in der Vorlesung.