Stefan Teufel, Stefan Haag
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2013/14
05.11.2013

Mathematische Physik: Quantenmechanik

Übungsblatt 4

Aufgabe 13: Operatorfolgen (2 Punkte)
Sei $\mathcal{H}$ ein unendlichdimensionaler separabler Hilbertraum und $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$. Geben Sie jeweils eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ und ein $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ an so, dass

a) A_n schwach gegen A konvergiert, aber nicht stark.

b) A_n stark gegen A konvergiert, aber nicht in der Norm.

Aufgabe 14: Multiplikationsoperatoren als Erzeuger (3 Punkte)
Sei $V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ messbar und sei $M_V : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ der Multiplikationsoperator aus Aufgabe 10.

a) Zeigen Sie, dass M_V mit Definitionsbereich $D(M_V) := \{\psi \in L^2(\mathbb{R}^d) \,|\, V\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)\}$ eine unitäre Gruppe $(U(t))_{t\in\mathbb{R}}$ erzeugt, falls $D(M_V)$ dicht in $L^2(\mathbb{R}^d)$ liegt, und bestimmen Sie diese Gruppe.

b) Zeigen Sie, dass $(U(t))_{t\in\mathbb{R}}$ genau dann normstetig ist, wenn $V \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ ist.

Aufgabe 15: Translationsgruppen (4 Punkte)

a) Sei $a \in \mathbb{R}$ und $\big(T_a(t)\big)_{t\in\mathbb{R}}$ die Translationsgruppe auf $L^2(\mathbb{R})$ (siehe Beispiel 2.20 aus der Vorlesung).

   i) Zeigen Sie, dass der Erzeuger von T_a gegeben ist durch $-\mathrm{i}a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ mit Domäne $H^1(\mathbb{R})$.

   ii) Zeigen Sie, dass $T_a(t)$ auf $L^2(\mathbb{R})$ für $t \to \infty$ schwach, jedoch nicht stark gegen 0 konvergiert.

b) Definieren Sie $H^m(\mathbb{S}^1)$ analog zu $H^m(\mathbb{R})$ (Definition 3.28 aus der Vorlesung), indem Sie $\mathbb{S}^1$ als Intervall $[0, 2\pi)$ mit Identifikation von 0 und 2π auffassen und Fourierreihen statt Fouriertransformation verwenden. Geben Sie die unitäre Gruppe an, die von $-\mathrm{i}a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}$ mit Domäne $H^1(\mathbb{S}^1)$ und $a \in \mathbb{R}$ erzeugt wird.

Aufgabe 16: Faltung in L^p (4 Punkte)
Sei $1 \le p < \infty$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$.

a) Zeigen Sie unter Verwendung der Hölder-Ungleichung, also

$$\|fg\|_{L^1} \;\le\; \|f\|_{L^p}\,\|g\|_{L^q}$$

für $1/p + 1/q = 1$, dass für $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$

$$\|f * g\|_{L^p} \;\le\; \|f\|_{L^p}\,\|g\|_{L^1}\,.$$

Tipp: Zeigen Sie zunächst $f * g \in L^p(\mathbb{R}^d)$, indem Sie $L^p(\mathbb{R}^d) = (L^q(\mathbb{R}^d))'$ (der Dualraum von L^q) verwenden. Die Ungleichung ergibt sich dann aus folgender Konsequenz des Satzes von Hahn-Banach: Zu jedem $h \in L^p(\mathbb{R}^d)$ existiert ein $\tilde{h} \in L^q(\mathbb{R}^d)$ mit $\|\tilde{h}\|_{L^q} = 1$ und

$$\|h\|_{L^p} = \tilde{h}(h) := \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{h}(x)h(x)\mathrm{d}x\,.$$

b) Sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\varphi \geq 0$ und $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi = 1$. Setze $f_\sigma := f * (D_\sigma^1 \varphi)$, siehe Aufgabe 5. Zeigen Sie unter Verwendung von a), dass f_σ für $\sigma \to 0$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$ gegen f konvergiert, d.h.

$$\lim_{\sigma \to 0} \|f_\sigma - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \; = \; 0\,.$$

Tipp: Benutzen Sie, dass $C_0(\mathbb{R}^d) \subset L^p(\mathbb{R}^d)$ dicht ist, und Aufgabe 6!

Abgabe: Dienstag den 12.11.2013, in der Vorlesung.