Stefan Teufel, Stefan Haag
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2013/14
12.11.2013

Mathematische Physik: Quantenmechanik

Übungsblatt 5

Aufgabe 17: Unitäre Gruppen mit beschränkten Erzeugern (2 Punkte)
Sei $\mathcal{H}$ Hilbertraum und $H \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ symmetrisch. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} \;:=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i}Ht)^n}{n!}$$

eine von $(H, \mathcal{H})$ erzeugte unitäre Gruppe definiert, die in t uniform differenzierbar ist.

Aufgabe 18: Neumannsche Reihe (2 Punkte)
Sei X ein Banachraum und $T \in \mathcal{L}(X)$ mit $\|T\| < 1$. Zeigen Sie, dass $1 - T$ invertierbar ist mit

$$(1-T)^{-1} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

Zeigen Sie weiter, dass $T \in \mathcal{L}(X)$ invertierbar ist, falls $\|1 - T\| < 1$.

Aufgabe 19: (Nicht-)Abschließbare Operatoren (3 Punkte)

a) Sei T abschließbar, d.h. T besitzt eine abgeschlossene Erweiterung. Zeigen Sie, dass $\overline{\Gamma(T)}$ dann der Graph eines linearen Operators $\overline{T}$ ist.
b) Sei T symmetrisch, also abschließbar. Zeigen Sie, dass $\overline{T}$ ebenfalls symmetrisch ist.
c) Zeigen Sie, dass die Dirac-Distribution $(\delta, C_0(\mathbb{R}))$ als unbeschränkter Operator von $L^2(\mathbb{R})$ nach $\mathbb{C}$ nicht abschließbar ist. Bestimmen Sie dazu $\overline{\Gamma(\delta)}$.

Aufgabe 20: Satz von Banach-Alaoglu für separable Hilberträume (3 Punkte)
Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum und (ψ_n) eine Folge in $\mathcal{H}$ mit $\|\psi_n\|_{\mathcal{H}} \leq 1$ für alle n. Zeigen Sie, dass (ψ_n) eine schwach konvergente Teilfolge besitzt.

Tipp: Orthonormalbasis, Satz von Bolzano-Weierstraß und Diagonalfolgenargument!

Aufgabe 21: Satz von Rellich* (4 Zusatzpunkte)

a) Geben Sie ein Skalarprodukt an, welches $H^m(\mathbb{R}^d)$ zu einem Hilbertraum macht.
b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Wir definieren $H^m(\Omega) := \{\psi|_\Omega \,|\, \psi \in H^m(\mathbb{R}^d)\}$. Zeigen Sie, dass die Einbettung von $H^1(\Omega)$ nach $L^2(\Omega)$ kompakt ist (Satz von Rellich), d.h. jede Folge (ψ_n), die in $H^1(\Omega)$ unabhängig von n beschränkt ist, besitzt eine Teilfolge, die in $L^2(\Omega)$ konvergiert.
Anleitung: Gehen Sie zunächst über zu $H^1(\mathbb{R}^d)$, indem Sie die Funktionen ψ_n zu Funktionen mit kompaktem Träger auf $\mathbb{R}^d$ fortsetzen. Beschaffen Sie sich dann eine in $H^1(\mathbb{R}^d)$ (und damit auch in $L^2(\mathbb{R}^d)$) schwach konvergente Teilfolge. Zeigen Sie, dass für diese Teilfolge die Fouriertransformierte punktweise konvergiert, wobei Sie den kompakten Träger der Fortsetzungen ausnützen. Mit Hilfe der punktweisen Konvergenz zeigt man die L^2-Konvergenz der Fouriertransformierten auf $B_R := \{k \in \mathbb{R}^d \,|\, |k| \leq R\}$ unabhängig von $R > 0$. Zeigen Sie nun noch die L^2-Konvergenz auf dem Komplement B_R^C und setzen Sie alles zusammen!

Abgabe: Dienstag den 19.11.2013, in der Vorlesung.