Stefan Teufel, Stefan Haag
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2013/14
19.11.2013

Mathematische Physik: Quantenmechanik

Übungsblatt 6

Aufgabe 22: Polarisation (3 Punkte)

a) Sei X ein komplexer Vektorraum und $B : X \times X \to \mathbb{C}$ eine Sesquilinearform, d.h. B ist anti-linear im ersten und linear im zweiten Argument. Zeigen, dass für alle $x, y \in X$ gilt

$$B(x,y) = \tfrac{1}{4}\big(B(x+y,x+y) - B(x-y,x-y) - \mathrm{i}B(x+\mathrm{i}y,x+\mathrm{i}y) + \mathrm{i}B(x-\mathrm{i}y,x-\mathrm{i}y)\big)\,.$$

b) Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Zeigen Sie unter Verwendung von (a), dass ein dicht definierter Operator $(T, D(T))$ auf $\mathcal{H}$ genau dann symmetrisch ist, wenn

$$\langle\psi, T\psi\rangle \in \mathbb{R} \quad \text{für alle } \psi \in D(T).$$

c) Sei C eine anti-lineare Isometrie. Zeigen Sie, dass

$$\langle C\psi, C\varphi\rangle = \langle\varphi,\psi\rangle \quad \text{für alle } \psi,\varphi \in \mathcal{H}.$$

Aufgabe 23: Laplace-Operator auf der Halbachse (4 Punkte)

Wir betrachten $\big(-\Delta,\, C_0^\infty((0,\infty))\big)$ mit $\Delta = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ als unbeschränkten Operator auf $L^2([0,\infty))$.

a) Bestimmen Sie alle selbstadjungierten Erweiterungen von $\big(-\Delta, C_0^\infty(0,\infty)\big)$, indem sie alle unitären Erweiterungen der Cayley-Transformierten geeignet parametrisieren und damit den Definitionsbereich der zugehörigen Erweiterung von $-\Delta$ bestimmen.

b) Wir definieren

$$\begin{aligned} H_D^2(0,\infty) &:= \{\psi \in H^2(0,\infty) \,|\, \psi(0) = 0\},\\ H_N^2(0,\infty) &:= \{\psi \in H^2(0,\infty) \,|\, \psi'(0) = 0\} \end{aligned}$$

und nennen $-\Delta_D = \big(-\Delta, H_D^2(0,\infty)\big)$ den Dirichlet- und $-\Delta_N = \big(-\Delta, H_N^2(0,\infty)\big)$ den Neumann-Laplace-Operator. Für welche Parameter in a) erhält man $-\Delta_D$ bzw. $-\Delta_N$? Machen Sie sich klar, in welchem Sinne sich die erzeugten unitären Gruppen unterscheiden, indem Sie die Reflexion eines Wellenpakets am Ursprung diskutieren. Überlegen Sie sich dazu, wie man aus Lösungen der freien Schrödingergleichung auf ganz $\mathbb{R}$ Lösungen auf $[0,\infty)$ mit entsprechenden Randbedingungen bekommt.

Aufgabe 24: Abgeschlossenheit und Spektrum (3 Punkte)

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $(T, D(T))$ dicht definiert. Zeigen Sie, dass T abgeschlossen ist, falls $\sigma(T) \neq \mathbb{C}$, also falls $\rho(T) \neq \emptyset$.

Aufgabe 25: Spektrum von Multiplikationsoperatoren $*$ (4 Zusatzpunkte)
Sei (X, μ) ein Maßraum und $f : X \to \mathbb{R}$ messbar. Wir definieren $D := \{\psi \in L^2(X, \mu) \,|\, f\psi \in L^2(X, \mu)\}$.

a) Zeigen Sie, dass D dicht in $L^2(X, \mu)$ ist und der Multiplikationsoperator (M_f, D) auf $L^2(X, \mu)$ selbstadjungiert ist.

b) Zeigen Sie, dass $\sigma(M_f) = \operatorname{ess\,ran} f$ ist, wobei

$$\operatorname{ess\,ran} f \;:=\; \big\{\lambda \in \mathbb{R} \,\big|\, \mu\big(f^{-1}(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)\big) > 0 \text{ für alle } \varepsilon > 0\big\}.$$

Tipp: Was ist die Resolvente eines Multiplikationsoperators?

Abgabe: Dienstag den 26.11.2013, in der Vorlesung.