Stefan Teufel, Stefan Haag
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2013/14
26.11.2013

Mathematische Physik: Quantenmechanik

Übungsblatt 7

Aufgabe 26: Resolventenkonvergenz (4 Punkte)

Sei $\mathcal{H}$ Hilbertraum, $(A, D(A))$ ein selbstadjungierter Operator und $(A_n, D(A_n))$ eine Folge selbstadjungierter Operatoren.

a) Angenommen, es gilt $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C$ und $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Zeigen Sie, dass dann

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n - A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \;=\; 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} \|R_z(A_n) - R_z(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \;=\; 0.$$

b) Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) Zu jedem $\psi \in D(A)$ gibt es eine Folge (ψ_n) mit $\psi_n \in D(A_n)$ und

$$\lim_{n\to\infty} \|\psi_n - \psi\|_{\mathcal{H}} \;=\; 0 \;=\; \lim_{n\to\infty} \|A_n\psi_n - A\psi\|_{\mathcal{H}}\,.$$

(ii) Es gibt ein $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ so, dass für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|R_z(A_n)\varphi - R_z(A)\varphi\|_{\mathcal{H}} \;=\; 0\,.$$

Aufgabe 27: Operatorbeschränktheit (3 Punkte)

Seien A, B dicht definiert mit $D(A) \subset D(B)$. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) Es gibt $a, b \geq 0$ so, dass

$$\|B\varphi\| \;\leq\; a\,\|A\varphi\| \;+\; b\,\|\varphi\| \quad \text{für alle } \varphi \in D(A)\,.$$

(ii) Es gibt $\tilde{a}, \tilde{b} \geq 0$ so, dass

$$\|B\varphi\|^2 \;\leq\; \tilde{a}^2\,\|A\varphi\|^2 \;+\; \tilde{b}\,\|\varphi\|^2 \quad \text{für alle } \varphi \in D(A)\,.$$

Zeigen Sie auch, dass das Infimum aller zulässigen a in (i) mit dem Infimum aller zulässigen $\tilde{a}$ in (ii) übereinstimmt.

Aufgabe 28: Hardy-Ungleichung (4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass es für alle $\varepsilon > 0$ ein $C_\varepsilon < \infty$ gibt so, dass für alle $\psi \in H^2(\mathbb{R}^d)$ und $j = 1, \ldots, d$

$$\|\partial_{x_j}\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \;\leq\; \varepsilon\,\|\Delta\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \;+\; C_\varepsilon\,\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

b) Zeigen Sie, dass es ein $C < \infty$ gibt so, dass für alle $\psi \in H^1(\mathbb{R}^3) \cap C_0^1(\mathbb{R}^3)$

$$\|\,|x|^{-1}\psi\,\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \;\leq\; C\,\|\,|\nabla\psi|\,\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Folgern Sie dann mit Hilfe des Lemmas von Fatou, dass die Ungleichung für alle $\psi \in H^1(\mathbb{R}^3)$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass es für alle $\psi \in H^2(\mathbb{R}^3)$ und $\varepsilon > 0$ ein $C_\varepsilon < \infty$ gibt, so dass

$$\|\,|x|^{-1}\psi\,\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \;\leq\; \varepsilon\,\|\Delta\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \;+\; C_\varepsilon\,\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Abgabe: Dienstag den 03.12.2013, in der Vorlesung.