Stefan Teufel, Stefan Haag
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2013/14
03.12.2013

Mathematische Physik: Quantenmechanik

Übungsblatt 8

Aufgabe 29: Funktionalkalkül für diagonalisierbare Operatoren (3 Punkte)
Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum, $(H, D(H))$ ein selbstadjungierter Operator und (φ_n) eine ONB aus Eigenfunktionen, d.h. $\varphi_n \in D(H)$ und es gibt (λ_n) mit $H\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$. Für beschränktes und messbares $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definieren wir $f(H)$ durch

$$f(H)\psi \ := \ \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n)\langle\varphi_n, \psi\rangle\varphi_n.$$

Zeigen Sie, dass dadurch ein Funktionalkalkül definiert wird.

Aufgabe 30: Eigenschaften der Funktionenklasse $\mathcal{A}$ (3 Punkte)
In der Vorlesung wurden die Funktionenklasse $\mathcal{A}$ und dazugehörige Normen $\|\cdot\|_n$ definiert.

a) Seien $f, g \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass auch $f \cdot g \in \mathcal{A}$.

b) Für $f \in \mathcal{A}$ gilt $f' \in L^1(\mathbb{R})$ und $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$.

c) Für $f \in \mathcal{A}$ und $n \geq 1$ gilt $\|f\|_\infty \leq \|f\|_n$.

Aufgabe 31: Helffer-Sjöstrand-Formel (3 Punkte)
Sei $(H, D(H))$ ein selbstadjungierter Operator auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ und $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp} f \cap \sigma(H) = \emptyset$. Sei $f(H)$ durch die Formel

$$f(H) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial\tilde{f}}{\partial\bar{z}}(z)(H-z)^{-1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

aus der Vorlesung (Helffer-Sjöstrand-Formel) gegeben. Zeigen Sie, dass $f(H) = 0$ ist, indem Sie den Satz von Stokes für Operator-wertige Differentialformen verwenden.

Aufgabe 32: Anwendung der Helffer-Sjöstrand-Formel (4 Punkte)

a) Sei $(H, D(H))$ ein selbstadjungierter Operator auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Wir definieren auf $D(H)$ die Graphennorm $\|\cdot\|_{D(H)}$ durch $\|\psi\|^2_{D(H)} \ := \ \|\psi\|^2_{\mathcal{H}} + \|H\psi\|^2_{\mathcal{H}}$. Da H abgeschlossen ist, macht diese Norm $D(H)$ zu einem Hilbertraum, also inbesondere zu einem Banachraum. Zeigen Sie, dass

$$\|R_z(H)\|^2_{\mathcal{L}(\mathcal{H},D(H))} \ \leq \ 2 + \frac{1+2|z|^2}{|\mathrm{Im} z|^2}.$$

b) Sei $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass es ein $C < \infty$ gibt so, dass für jeden selbstadjungierten Operator $(H, D(H))$ und jedes $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \cap \mathcal{L}(D(H))$ gilt:

$$\big\|[H, A]\big\|_{\mathcal{L}(D(H),\mathcal{H})} \ \leq \ \delta \qquad \Rightarrow \qquad \|[f(H), A]\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H},D(H))} \ \leq \ C\,\delta,$$

wobei $f(H)$ wiederum durch die Helffer-Sjöstrand-Formel gegeben sei.

Abgabe: Dienstag den 10.12.2013, in der Vorlesung.