Stefan Teufel, Stefan Haag
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2013/14
10.12.2013

Mathematische Physik: Quantenmechanik

Übungsblatt 9

Aufgabe 33: Invariante Unterräume (2 Punkte)
Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $(H, D(H))$ ein selbstadjungierter Operator und $L \subset \mathcal{H}$ ein H-invarianter Unterraum. Zeigen Sie: aus $\varphi \in L \cap D(H)$ folgt, dass $H\varphi \in L$.

Aufgabe 34: Zyklische Vektoren (4 Punkte)

(a) Sei $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ein beschränkter selbstadjungierter Operator und $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es eine Folge von Polynomen $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gibt mit $\lim_{n\to\infty} p_n(A) = (A - z)^{-1}$.

(b) Sei $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ein beschränkter selbstadjungierter Operator. Zeigen Sie, dass ein Vektor v genau dann zyklisch ist, wenn $\operatorname{span}\{A^n v \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ dicht liegt.

(c) Sei $\mathcal{H}$ ein endlich-dimensionaler Hilbertraum und A ein selbstadjungierter Endomorphismus. Zeigen Sie, dass A genau dann einen zyklischen Vektor besitzt, wenn alle Eigenwerte von A einfach sind.

Aufgabe 35: Resolventenkonvergenz (4 Punkte)
Sei $\mathcal{H}$ Hilbertraum, $(A, D(A))$ selbstadjungierter Operator und $(A_n, D(A_n))_n$ eine Folge selbstadjungierter Operatoren.

(a) Man sagt A_n konvergiert gegen A im Norm-Resolventen-Sinne, falls

$$\forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} \|R_z(A_n) - R_z(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = 0 \,.$$

Zeigen Sie, dass dann die Implikationen

$$f \in C_\infty(\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \|f(A_n) - f(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = 0$$

und

$$f \in C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad \text{s-lim}_{n\to\infty} f(A_n) = f(A)$$

gelten.

(b) Man sagt A_n konvergiert gegen A im starken-Resolventen-Sinne, falls

$$\forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} : \text{s-lim}_{n\to\infty} R_z(A_n) = R_z(A) \,.$$

Zeigen Sie, dass dann immer noch die Implikation

$$f \in C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad \text{s-lim}_{n\to\infty} f(A_n) = f(A)$$

gilt.

Hinweis: Im ersten Teil von (a) dürfen Sie verwenden, dass das Integral in der Helffer-Sjöstrand-Formel für $f \in \mathcal{A}$ als Bochner-Integral aufgefasst werden kann und daher $\| \int_{\mathbb{C}} A \,\mathrm{d}z \| \le \int_{\mathbb{C}} \|A\| \,\mathrm{d}z$ gilt.

Abgabe: Dienstag den 17.12.2013, in der Vorlesung.