

Höhere Mathematik: Funktionentheorie

Thomas Markwig
Fachbereich Mathematik
Technische Universität Kaiserslautern

Vorlesungsskript

Sommersemester 2016

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
Kapitel I Die komplexen Zahlen und komplexe Funktionen	3
§ 1 Komplexe Funktionen	3
§ 2 Komplexe Differenzierbarkeit	12
§ 3 Harmonische und konforme Abbildungen	20
Kapitel II Der Cauchysche Integralsatz und seine Anwendungen	31
§ 4 Komplexe Kurvenintegrale und der Cauchysche Integralsatz	31
§ 5 Die Cauchysche Integralformel und Potenzreihenentwicklung	45
§ 6 Isolierte Singularitäten und Laurententwicklung	51
§ 7 Der Residuensatz und seine Anwendungen	67
Kapitel III Integraltransformationen und die \mathcal{Z} -Transformation	85
§ 8 Die Laplace- und die Fouriertransformation	85
§ 9 Die \mathcal{Z} -Transformation	105
Anhang	115
§ 10 Der Körper der komplexen Zahlen	115
§ 11 Topogische Grundbegriffe	125
§ 12 Anwendungen der Cauchyschen Integralformel	134
Literaturverzeichnis	145

Einleitung

Es handelt sich hierbei um eine Kurzzusammenfassung der Inhalte der Vorlesung Höhere Mathematik Funktionentheorie, die im Laufe des Semesters mit dem Fortgang der Vorlesung erweitert und ergänzt wird. Sie erhebt nicht den Anspruch, vollständig zu sein, und ersetzt nicht den Besuch der Vorlesung.

Wichtige Begriffe und Ergebnisse der mehrdimensionalen Analysis aus den Vorlesungen Höhere Mathematik 1 und Höhere Mathematik 2 werden als bekannt vorausgesetzt. Dazu zählen topologische Grundbegriffe wie offen, abgeschlossen und kompakt genauso wie Folgen, Grenzwerte, Stetigkeit und Differenzierbarkeit. Auch der Körper der komplexen Zahlen und die Darstellung einer komplexen Zahl in kartesischen Koordinaten und alternativ in Polarkoordinaten wird als bekannt vorausgesetzt. Einige Begrifflichkeiten sind der Einfachheit halber im Anhang noch mal zusammengestellt (siehe Abschnitt 10 und Abschnitt 11).

Die Bilder sind teilweise den Vorlesungsskripten von Herrn Greuel [**Gre97**] und Herrn Barakat [**Bar12**] entnommen, die Anwendungsbeispiele größtenteils [**AHK⁺08**].

Die komplexen Zahlen und komplexe Funktionen

§ 1 Komplexe Funktionen

In diesem Abschnitt wollen wir den Begriff der komplexen Funktion einführen. Wir werden zudem zeigen, wie die Erweiterung des Definitions- und Zielbereichs auch dann hilfreich sein kann, wenn man eigentlich an reellwertigen Funktionen zur Beschreibung von Phänomenen in Anwendungen interessiert ist.

A) Komplexe Funktionen

Bemerkung 1.1 (Einfach zusammenhängende Gebiete)

Aus der mehrdimensionalen Analysis ist bekannt, daß sich offene Teilmengen als Definitionsbereiche für Funktionen gut eignen, wenn man Fragen wie Differenzierbarkeit untersuchen möchte, und daß die Untersuchung des Verhaltens von Funktionen an Randpunkten meist Sonderbetrachtungen erfordert. Es ist also nicht verwunderlich, wenn wir im folgenden meist Funktionen betrachten, deren Definitionsbereich eine offene Teilmenge von \mathbb{C} ist. Wir werden für die wichtigsten Ergebnisse aber noch zwei weitere Voraussetzungen an den Definitionsbereich stellen müssen.

Zunächst sollte die Menge *wegzusammenhängend* sein, d. h. zwischen je zwei Punkten sollte es einen stetigen Weg geben; insbesondere zerfällt sie also nicht in mehrere unzusammenhängende Komponenten. Eine offene Menge, die wegzusammenhängend ist, nennen wir auch ein *Gebiet*. Im Zusammenhang mit komplexer Differenzierbarkeit werden wir uns auf Funktionen beschränken, die auf Gebieten definiert sind.

In manchen Situationen ist werden wir aber zusätzlich benötigen, daß das Gebiet keine *Löcher* hat, d. h. daß man jeden geschlossenen stetigen Weg auch stetig zu einem Punkt zusammenziehen kann. Solche Gebiete nennt man *einfach zusammenhängend*.

Ein sehr einfaches Beispiel für ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist die Kreisscheibe

$$K_r(z) := \{w \in \mathbb{C} \mid |w - z| < r\}$$

vom Radius $r > 0$ um einen Punkt $z \in \mathbb{C}$. Dies sind alle Punkte in der Zahlenebene, deren euklidischer Abstand zu z kleiner als r ist.

Für eine saubere Definition der Begriffe und weitere Beispiele verweisen wir auf den Anhang (siehe Abschnitt 11).

Definition 1.2

Sei D eine nicht-leere Teilmenge von \mathbb{C} .

- a. Eine Funktion

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

nennen wir eine *komplexe Funktion*. Die Funktion

$$\operatorname{Re}(f) : D \longrightarrow \mathbb{R} : z \mapsto \operatorname{Re}(f(z))$$

nennen wir den *Realteil* von f und die Funktion

$$\operatorname{Im}(f) : D \longrightarrow \mathbb{R} : z \mapsto \operatorname{Im}(f(z))$$

nennen wir ihren *Imaginärteil*. Es gilt offenbar

$$f = \operatorname{Re}(f) + i \cdot \operatorname{Im}(f).$$

Fassen wir den Zielbereich als \mathbb{R}^2 auf, so sind $\operatorname{Re}(f)$ und $\operatorname{Im}(f)$ die Komponentenfunktionen von f .

- b. Die Funktionen in a. heißen *stetig* in einem Punkt $a \in D$ bzw. auf D , wenn sie als Funktionen von der Teilmenge D des \mathbb{R}^2 nach \mathbb{R}^2 bzw. nach \mathbb{R} stetig in a bzw. auf D sind.

Beispiel 1.3

- a. Die Funktion

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto z^2$$

ist eine stetige komplexe Funktion mit Realteil

$$\operatorname{Re}(f) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} : x + iy \mapsto x^2 - y^2$$

und Imaginärteil

$$\operatorname{Im}(f) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} : x + iy \mapsto 2xy.$$

Allgemeiner liefert jedes Polynom $\sum_{k=0}^n a_k \cdot z^k$ mit komplexen Koeffizienten die Funktionsvorschrift für eine stetige komplexe *Polynomfunktion*

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \sum_{k=0}^n a_k \cdot z^k.$$

Der Definitionsbereich ist ein einfach zusammenhängendes Gebiet.

- b. Die Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \frac{1}{z}$$

ist eine stetige komplexe Funktion mit Realteil

$$\operatorname{Re}(f) : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} : x + iy \mapsto \frac{x}{x^2 + y^2}$$

und Imaginärteil

$$\operatorname{Im}(f) : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} : x + iy \mapsto \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

Der Definitionsbereich ist ein nicht einfach zusammenhängendes Gebiet.

c. Die komplexe Konjugation

$$\bar{\cdot} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \bar{z}$$

ist eine stetige komplexe Funktion mit Realteil

$$\operatorname{Re}(\bar{\cdot}) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} : x + iy \mapsto x$$

und Imaginärteil

$$\operatorname{Im}(\bar{\cdot}) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} : x + iy \mapsto -y.$$

d. Fassen wir die reellen Zahlen als Teilmenge von \mathbb{C} auf, so ist auch der Betrag

$$|\cdot| : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} : z \mapsto |z|$$

eine stetige komplexe Funktion, deren Imaginärteil aber die Nullfunktion ist.

e. Sind $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ und $v : D \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei beliebige Funktionen auf einer Teilmenge D von \mathbb{C} , so ist

$$f = u + iv : D \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto u(z) + i \cdot v(z)$$

eine komplexe Funktion. Genau dann ist f stetig, wenn u und v stetig sind.

Bemerkung 1.4 (Potenzreihen)

Wie im Reellen kann man Potenzreihen als Folgen von Partialsummen betrachten und deren Konvergenz untersuchen. Die im Reellen gültigen Konvergenzkriterien übertragen sich ohne Änderung auf die komplexen Zahlen. Mithin liefern auch die in der reellen Analysis verwendeten konvergenten Potenzreihen Formeln für die Definition komplexer Funktionen, deren Definitionsbereich nun Kreise um den Entwicklungspunkt der Potenzreihe sind. Der Radius der Kreise ist dabei genau der Konvergenzradius der Potenzreihe, wie er mit Hilfe der Formeln aus der reellen Analysis berechnet werden kann, d.h. für $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n$ ist

$$r = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$$

der Konvergenzradius. Die Potenzreihe konvergiert dann in der offenen Kreisscheibe $K_r(z_0)$ absolut und divergiert außerhalb ihres Abschlusses. Auf dem Rand kann man keine allgemeine Aussage zur Konvergenz treffen.

Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ hat z.B. den Konvergenzradius 1 und definiert mithin eine stetige komplexe Funktion

$$K_1(0) \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

auf der offenen Kreisscheibe vom Radius 0 um den Ursprung.

Satz 1.5 (Exponentialfunktion, Cosinus und Sinus)

Die folgenden Potenzreihen sind auf ganz \mathbb{C} konvergent und definieren mithin stetige komplexe Funktionen auf ganz \mathbb{C} .

a. *Die Funktion*

$$\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

heißt die komplexe Exponentialfunktion.

b. *Die Funktion*

$$\cos : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

heißt der komplexe Cosinus.

c. *Die Funktion*

$$\sin : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

heißt der komplexe Sinus.

Beweis: Wie in der reellen Analysis. □

Bemerkung 1.6 (Polarkoordinaten)

Aus Satz 1.5 läßt sich leicht ein sehr wichtiger funktionaler Zusammenhang zwischen der Exponentialfunktion, dem Sinus und dem Cosinus herleiten:

$$\begin{aligned} \exp(i\alpha) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\alpha)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k \cdot \alpha^k}{k!} \\ &\stackrel{!}{=} \sum_{\text{gerade } k} \frac{i^k \cdot \alpha^k}{k!} + \sum_{\text{ungerade } k} \frac{i^k \cdot \alpha^k}{k!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n} \cdot \alpha^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1} \cdot \alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i^2)^n \cdot \alpha^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i \cdot (i^2)^n \cdot \alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \alpha^{2n}}{(2n)!} + i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha). \end{aligned}$$

Diese Gleichung gilt für beliebige komplexe Zahlen α , aber wir interessieren uns nur für den Fall einer reellen Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$. Wie im Reellen ist es auch im Komplexen üblich die Exponentialfunktion als Potenz

$$e^z := \exp(z)$$

der Eulerschen Zahl e zu schreiben. Die obige Gleichung wird dann zu

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha). \tag{1}$$

Ist $\alpha = \arg(z)$ und $r = |z|$ für eine komplexe Zahl $0 \neq z \in \mathbb{C}$, so erhalten wir die Polarkoordinatendarstellung von z also kurz als

$$z = r \cdot e^{i\alpha}.$$

Die Schreibweise ist kürzer als die Schreibweise mittels Sinus und Cosinus. Wir werden sie deshalb im weiteren Verlauf verwenden, wann immer wir mit Polarkoordinaten arbeiten wollen.

Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen $w = r \cdot e^{i\alpha}$ und $z = s \cdot e^{i\beta}$ als

$$w \cdot z = r \cdot e^{i\alpha} \cdot s \cdot e^{i\beta} = rs \cdot e^{i(\alpha+\beta)}$$

ist dann eine direkte Konsequenz der Potenzgesetze oder, genauer gesagt, der Funktionalgleichung

$$\exp(a + b) = \exp(a) \cdot \exp(b)$$

die im Komplexen genauso gilt wie im Reellen.

Bemerkung 1.7 (Der Hauptzweig des Logarithmus)

Bislang haben wir in diesem Kapitel nur Eigenschaften von Funktionen, insbesondere der Exponentialfunktion, betrachtet, die sich vom Reellen ohne Änderung auf das Komplexe übertragen ließen. Das geht aber nicht immer und in allem gut.

Die reelle Exponentialfunktion ist streng monoton wachsend und mithin injektiv, d.h. für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \neq y$ galt stets auch $\exp(x) \neq \exp(y)$. Dies ist für komplexe Argumente nicht mehr richtig, wie unmittelbar aus der Formel (1) abzuleiten ist. Ist nämlich $z = x + iy \in \mathbb{C}$, so gilt

$$\exp(z) = \exp(x) \cdot \exp(iy) = \exp(x) \cdot \exp(i \cdot (y + 2\pi k)) = \exp(x + i \cdot (y + 2\pi k))$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$, da Sinus und Cosinus im Reellen 2π -periodisch sind. Die Exponentialfunktion ist nur noch auf einem Streifen

$$\mathbb{R} \times (\alpha, \alpha + 2\pi) \subset \mathbb{C}$$

injektiv und damit umkehrbar, wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt werden kann!

Aus der Formel

$$\exp : \mathbb{R} \times (\alpha, \alpha + 2\pi) \longrightarrow \mathbb{C} : x + iy \mapsto e^x \cdot (\cos(y) + i \cdot \sin(y))$$

ergibt sich dann unmittelbar, daß das Bild dieses Streifens unter der Exponentialfunktion eine geschlitzte Ebene ist, bei der aus \mathbb{C} die Halbgerade entfernt ist, die im Ursprung ansetzt und mit der positiven x -Achse den Winkel α einschließt, d.h. die den Richtungsvektor $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ hat.

Für jede Wahl von α erhalten wir eine Umkehrfunktion für die Exponentialfunktion. Jede dieser Funktionen nennen wir einen *Zweig des Logarithmus*. Aus Symmetriegründen scheint es naheliegend, $\alpha = -\pi$ zu wählen. Wir erhalten dann den sogenannten *Hauptzweig des Logarithmus*

$$\ln : \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \ln(|z|) + i \cdot \arg(z)$$

als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion

$$\exp : \mathbb{R} \times (-\pi, \pi) \longrightarrow \mathbb{C},$$

wenn wir uns darauf einigen, daß das Argument im Intervall $(-\pi, \pi)$ gewählt wird.

B) Ortskurven

Bemerkung 1.8 (Ortskurven)

In unserer Definition komplexer Funktionen lassen wir zu, daß der Definitionsbereich D ein Intervall in den reellen Zahlen ist. Ist die Funktion stetig, so erhalten wir als Bild eine Kurve in der Zahlenebene \mathbb{C} . Wir wollen nun Beispiele für solche Kurven betrachten, die in Anwendungen interessant sind.

Bemerkung 1.9 (Anwendungen in der Wechselstromtechnik)

Es seien $A \in \mathbb{R}_{>0}$ sowie $\omega, \varphi \in \mathbb{R}$ gegeben. Die komplexe Funktion

$$p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} : t \mapsto A \cdot e^{i(\omega \cdot t + \varphi)}$$

beschreibt die Bewegung eines Punktes P auf einem Kreis mit Radius A um den Ursprung mit der konstanten *Winkelgeschwindigkeit* ω .

Der Realteil von p

$$\operatorname{Re}(p) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : t \mapsto A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

entspricht der Projektion der Bewegung auf die x -Achse und ist eine harmonische Schwingung mit *Amplitude* A , *Kreisfrequenz* ω , *Periode* $\frac{2\pi}{\omega}$ und *Phasenlage* φ .

In der Wechselstromtechnik sind die *Spannung*

$$u(t) = \hat{U} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_u)$$

und die *Stromstärke*

$$i(t) = \hat{I} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_i)$$

solche harmonischen Schwingungen. Um gut mit ihnen rechnen zu können hat es sich als hilfreich erwiesen, diese als Realteil der zugehörigen komplexen Funktionen

$$U(t) = \hat{U} \cdot e^{i(\omega \cdot t + \varphi_u)}$$

und

$$I(t) = \hat{I} \cdot e^{i(\omega \cdot t + \varphi_i)}$$

aufzufassen. Wir nennen die komplexe Zahl

$$Z = \frac{U(t)}{I(t)} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} \cdot e^{i(\varphi_u - \varphi_i)}$$

den *komplexen Widerstand* oder *Scheinwiderstand* des zugehörigen Netzwerkes. Man beachte, daß er nicht von der Zeit t abhängt und der Gleichung

$$U(t) = Z \cdot I(t)$$

genügt. Sein Realteil

$$\operatorname{Re}(Z) = |Z| \cdot \cos(\varphi_u - \varphi_i)$$

ist der *Wirkwiderstand* und sein Imaginärteil

$$\operatorname{Im}(Z) = |Z| \cdot \sin(\varphi_u - \varphi_i)$$

der sogenannte *Blindwiderstand*. Entsprechend nennt man den Winkel $\varphi_u - \varphi_i$ die *Phasenverschiebung* zwischen Strom und Spannung, und für die Amplituden gilt die Gleichung

$$\hat{U} = |Z| \cdot \hat{I}.$$

Man nennt ferner

$$U_W(t) = \operatorname{Re}(Z) \cdot I(t)$$

die *Wirkspannung* und sie hat die gleiche Phasenlage wie die Spannung, und man nennt

$$U_B(t) = i \cdot \operatorname{Im}(Z) \cdot I(t)$$

die *Blindspannung*, die als Vektor senkrecht auf dem Strom steht. Entsprechend heißen

$$I_W(t) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{Z}\right) \cdot U(t)$$

der *Wirkstrom* und

$$I_B(t) = i \cdot \operatorname{Im}\left(\frac{1}{Z}\right) \cdot U(t)$$

der *Blindstrom*.

Zu den grundlegenden Bauelementen von Schaltkreisen gehören *ohmsche Widerstände*

$$Z = R \in \mathbb{R},$$

ideale *Kondensatoren* mit Kapazität C und

$$Z = -\frac{i}{\omega \cdot C}$$

sowie *Spulen* mit Induktivität L und

$$Z = i \cdot \omega \cdot L.$$

Kondensatoren und Spulen sind also frequenzabhängige reine Blindwiderstände. Schaltet man die Bauelemente mit den Widerständen Z_1, \dots, Z_n in Serie, so gilt für den Gesamtwiderstand

$$Z = Z_1 + \dots + Z_n,$$

schaltet man sie parallel, so gilt für den Gesamtleitwert

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \dots + \frac{1}{Z_n}.$$

Gehen wir konkret von einem *Serienschwingkreis* aus, bei dem ein ohmscher Widerstand R , ein Kondensator mit Kapazität C und eine Spule mit Induktivität L in Serie geschaltet sind, so erhalten wir für den Gesamtwiderstand die Formel

$$Z = R + i \cdot \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right).$$

Fassen wir den Gesamtwiderstand als Funktion in ω auf, so erhalten wir als Ortskurve der Funktion eine Gerade, die parallel zur y -Achse ist und durch den Punkt R geht.

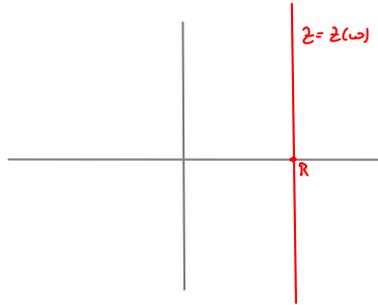


ABBILDUNG 1. Ortskurve des Widerstandes $Z(\omega)$ beim Serienschwingkreis.

Für den *Leitwert* $\frac{1}{Z}$ erhalten wir als Ortskurve einen Kreis durch den Ursprung mit Mittelpunkt $\frac{1}{2R}$ (siehe Abbildung 2. Um dies zu sehen, beachten wir, daß für einen Punkt $R + i \cdot S$ mit $S = S(\omega)$ auf der Geraden

$$\frac{1}{R + i \cdot S} = \frac{R}{R^2 + S^2} - i \cdot \frac{S}{R^2 + S^2}$$

gilt und daß dieser vom Punkt $\frac{1}{2R}$ den nicht von $S = S(\omega)$ abhängenden konstanten Abstand

$$\begin{aligned} \left| \frac{R}{R^2 + S^2} - i \cdot \frac{S}{R^2 + S^2} - \frac{1}{2R} \right| &= \left| \frac{2R^2 - R^2 - S^2}{2R \cdot (R^2 + S^2)} - i \cdot \frac{2RS}{2R \cdot (R^2 + S^2)} \right| \\ &= \sqrt{\frac{(R^2 - S^2)^2 + 4R^2S^2}{4R^2 \cdot (R^2 + S^2)}} \\ &= \sqrt{\frac{R^4 + 2R^2S^2 + S^4}{4R^2 \cdot (R^2 + S^2)}} \\ &= \sqrt{\frac{(R^2 + S^2)^2}{4R^2 \cdot (R^2 + S^2)^2}} = \frac{1}{2R} \end{aligned}$$

hat.

Aufgaben

Aufgabe 1.10

Wie im Reellen ist der Konvergenzradius r einer Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ durch $r =$

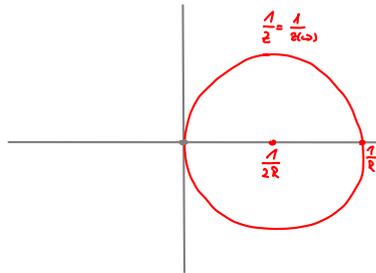


ABBILDUNG 2. Ortskurve des Leitwertes $\frac{1}{Z(\omega)}$ beim Serienschwingkreis.

$\frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ gegeben, sofern dieser Grenzwert existiert. Zeige, der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot z^{n-1}$ ist dann auch r .

Aufgabe 1.11

Wir betrachten nochmal den Serienschwingkreis aus Bemerkung 1.9 mit einem ohmschen Widerstand R , einem idealen Kondensator mit Kapazität C und einer Spule mit Induktivität L . Die Resonanzfrequenz des Schwingkreises ist die Frequenz, für die die Phasenlagen φ_u der Spannung und φ_i des Stroms übereinstimmen. Berechne diese.

Aufgabe 1.12

Überprüfe, ob die folgenden Funktionen $f = u + i \cdot v : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ Polynomfunktionen in $z = x + iy$ sind und finde ggf. die Funktionsvorschrift in z .

- $u(x + iy) = x^2 - y^2 + 2x + 1, v(x + iy) = 2xy + 2y.$
- $u(x + iy) = x^2 + y^2 - 1, v(x + iy) = 2x^2 - 2y^2.$

§ 2 Komplexe Differenzierbarkeit

In diesem Abschnitt wollen wir den Begriff der komplexen Differenzierbarkeit oder Holomorphie einer komplexen Funktion einführen. Wir werden sehen, daß hierzu mehr erforderlich ist, als daß die Funktion reell total differenzierbar ist. In den folgenden Abschnitten werden wir dann sehen, daß dieses kleine Extra uns sehr viel mehr liefert, daß etwa aus der einfachen Differenzierbarkeit einer Funktion schon folgt, daß sie unendlich oft differenzierbar ist und mit ihrer Taylorreihe auf deren Konvergenzbereich übereinstimmt.

A) Komplexe Differenzierbarkeit

Definition 2.1 (Komplex differenzierbar und holomorph)

Es sei D eine offene Teilmenge von \mathbb{C} und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine komplexe Funktion.

- a. f heißt *komplex differenzierbar* in $a \in D$, wenn der Grenzwert

$$f'(a) := \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

des Differenzenquotienten existiert.

- b. f heißt *holomorph*, wenn f in jedem Punkt von D komplex differenzierbar ist.
 c. f heißt *ganz*, wenn f holomorph auf $D = \mathbb{C}$ ist.

Proposition 2.2 (Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen)

Es sei D eine offene Teilmenge von \mathbb{C} und $f = u + i \cdot v$ mit $u, v : D \rightarrow \mathbb{R}$.

Genau dann ist f komplex differenzierbar in $a \in D$, wenn f als Funktion einer Teilmenge von \mathbb{R}^2 nach \mathbb{R}^2 reell total differenzierbar in a ist und u und v den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(a) = -\frac{\partial v}{\partial x}(a)$$

in a genügen.

Insbesondere gilt dann

$$f'(a) = \frac{\partial u}{\partial x}(a) + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(a).$$

Beweisidee: Wir wollen erklären, wie man zu den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen und zu der angegebenen Ableitungsformel kommt, wenn die komplexe Differenzierbarkeit vorausgesetzt wird. Dazu schreiben wir $a = b + i \cdot c$ und betrachten für $h \in \mathbb{R}$ und $h \rightarrow 0$ die Limites

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((b+h) + i \cdot c) - f(b + i \cdot c)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u((b+h) + i \cdot c) - u(b + i \cdot c)}{h} + i \cdot \frac{v((b+h) + i \cdot c) - v(b + i \cdot c)}{h} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(a) + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(a) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} f'(\mathbf{a}) &= \lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{b} + \mathbf{i} \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{h})) - f(\mathbf{b} + \mathbf{i} \cdot \mathbf{c})}{\mathbf{i} \cdot \mathbf{h}} \\ &= \lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}(\mathbf{b} + \mathbf{i} \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{h})) - \mathbf{u}(\mathbf{b} + \mathbf{i} \cdot \mathbf{c})}{\mathbf{i} \cdot \mathbf{h}} + \mathbf{i} \cdot \frac{\mathbf{v}(\mathbf{b} + \mathbf{i} \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{h})) - \mathbf{v}(\mathbf{b} + \mathbf{i} \cdot \mathbf{c})}{\mathbf{i} \cdot \mathbf{h}} \\ &= -\mathbf{i} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{a}) + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{a}). \end{aligned}$$

Daß die Limes jeweils die Ableitung von f in \mathbf{a} sind, folgt aus der Eindeutigkeit des Limesbegriffs. Die erste der beiden Formeln ist die oben angegebene Ableitungsformel, und durch Gleichsetzen der beiden Formeln erhalten wir die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. \square

Bemerkung 2.3 (Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen)

Weshalb sollte man die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für eine komplex differenzierbare Funktion erwarten?

Schauen wir uns die Abbildung

$$\alpha : \mathbb{C} \longrightarrow \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R}) : x + \mathbf{i} \cdot y \mapsto \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

an, so ist das Bild von α gerade die Menge der Matrizen

$$\left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Man überzeugt sich leicht, daß

$$\alpha(w + z) = \alpha(w) + \alpha(z)$$

und

$$\alpha(w \cdot z) = \alpha(w) \circ \alpha(z)$$

für $w, z \in \mathbb{C}$ gilt, wobei \circ das gewöhnliche Matrixprodukt ist. Da die Abbildung α zudem bijektiv ist, ist das Bild von α eine alternative Art, die komplexen Zahlen darzustellen. Wir können also Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

in kanonischer Weise als komplexe Zahlen auffassen.

Betrachten wir nun wieder die komplexe Funktion

$$f = \mathbf{u} + \mathbf{i} \cdot \mathbf{v} : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

als Funktion einer offenen Teilmenge des \mathbb{R}^2 in den \mathbb{R}^2 auf. Die reelle Ableitung von f in \mathbf{a} , d.h. die Jacobi-Matrix

$$Jf(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}(\mathbf{a}) & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}(\mathbf{a}) & \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}(\mathbf{a}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}(\mathbf{a}) & -\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}(\mathbf{a}) & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}(\mathbf{a}) \end{pmatrix} = \alpha(f'(\mathbf{a})),$$

ist wegen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen dann eine komplexe Zahl unter der obigen Identifikation und zwar genau die Ableitung $f'(a)$ von f in a !

Beispiel 2.4

- a. Die Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}: z \mapsto z^n$ ist holomorph mit $f'(a) = n \cdot a^{n-1}$, weil

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{z^n - a^n}{z - a} \\ &= \lim_{z \rightarrow a} (z^{n-1} + a \cdot z^{n-2} + a^2 \cdot z^{n-3} + \dots + a^{n-2} \cdot z + a^{n-1}) \\ &= a^{n-1} + \dots + a^{n-1} = n \cdot a^{n-1}. \end{aligned}$$

Für $n = 2$ prüfen wir auch die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen nach. Es gilt hier

$$f(x + iy) = x^2 - y^2 + i \cdot 2xy$$

und somit

$$u(x + iy) = x^2 - y^2$$

und

$$v(x + iy) = 2xy.$$

Als Jacobi-Matrix in $x + iy$ erhalten wir mithin

$$Jf(x + iy) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

und die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sind erfüllt.

- b. Allgemeiner sind jede Polynomfunktion in z und jede rationale Funktion in z auf ihrem Definitionsbereich holomorph mit den üblichen Ableitungsregeln.
c. Man beachte, daß die Funktion

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}: (x + iy) \mapsto x^2 + i \cdot y^2$$

zwar eine Polynomfunktion in x und y ist, nicht aber in z ! Letzteres sieht man daran, daß die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$Jf(x + iy) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix}$$

im allgemeinen nicht erfüllt sind und die Funktion mithin außer für $x = y$, d.h. außer auf der Winkelhalbierenden $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)\}$, nicht komplex differenzierbar ist.

- d. Die komplexe Konjugation

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}: z = x + iy \mapsto \bar{z} = x - iy$$

ist nirgendwo komplex differenzierbar, wegen

$$Jf(x + iy) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- e. Die Zweige des Logarithmus sind auf ihrem Definitionsbereich holomorph und aus der Funktionsvorschrift

$$\ln(z) = \ln|z| + i \cdot \arg(z) = u(z) + i \cdot v(z)$$

mit

$$u(x + iy) = \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

ergibt sich für die Ableitung

$$f'(x + iy) = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z}.$$

Nutzt man für das Argument von z die Formel

$$v(x + iy) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right),$$

so folgen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen durch einfaches Nachrechnen und damit ist dann auch die Holomorphie gezeigt.

Proposition 2.5 (Ableitungsregeln)

- a. Sind $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $a, b \in \mathbb{C}$, so sind auch $af + bg$, $f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ auf ihren Definitionsbereichen holomorph und es gelten die Ableitungsregeln
- (i) $(a \cdot f + b \cdot g)'(z) = a \cdot f'(z) + b \cdot g'(z)$, (Linearität der Ableitung)
 - (ii) $(f \cdot g)'(z) = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z)$, (Produktregel)
 - (iii) $\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z) \cdot g(z) - f(z) \cdot g'(z)}{g^2(z)}$. (Quotientenregel)
- b. Sind $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ und $g : D' \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $f(D) \subseteq D'$, dann ist auch $g \circ f$ holomorph auf D und es gilt die Kettenregel

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z)) \cdot f'(z).$$

Beweis: Wie in der eindimensionalen Analysis. □

Beispiel 2.6

Die Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \frac{1}{z}$$

ist als rationale Funktion holomorph auf der punktierten Ebene und die Ableitung erfüllt

$$f'(z) = -\frac{1}{z^2}.$$

Proposition 2.7 (Potenzreihen sind holomorph.)

Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und mit Konvergenzradius r . Dann ist die Funktion

$$f : K_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n$$

holomorph mit Ableitung

$$f' : K_r(z_0) \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (z - z_0)^{n-1}.$$

Beweisidee: Man überzeugt sich zunächst davon, daß die formale Ableitung der Potenzreihe denselben Konvergenzradius hat (siehe Übungen). Ist dann

$$f_n(z) = u_n(z) + i \cdot v_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot (z - z_0)^k$$

die n -te Partialsumme der Potenzreihe $f(z) = u(z) + i \cdot v(z)$, dann konvergiert u_n gegen u , v_n gegen v und die partiellen Ableitungen von u_n und v_n konvergieren gegen die partiellen Ableitungen von u und v (das ist aus der reellen Analysis bekannt). Außerdem gelten die Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen. \square

Korollar 2.8 (Taylorentwicklung von Potenzreihen)

Eine konvergente Potenzreihe definiert auf ihrem Konvergenzkreis eine unendlich oft komplex differenzierbare Funktion

$$f : K_r(z_0) \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n$$

und wenn $f^{(k)}$ die k -te Ableitung von f bezeichnet, so gilt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \cdot (z - z_0)^n.$$

Beweisidee: Wende Proposition 2.7 zunächst auf f an, dann auf f' , dann auf f'' , etc., um zu sehen, daß f unendlich oft differenzierbar ist. Die Formel von Taylor ergibt sich dann durch Einsetzen von z_0 in die n -te Ableitung

$$f^{(n)}(z_0) = a_n \cdot n!.$$

\square

Beispiel 2.9

- Die Funktionen \exp , \sin und \cos sind auf ganz $\mathbb{C} = K_{\infty}(0)$ holomorph.
- Die Funktion

$$f : K_1(0) \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

ist auf der offenen Kreisscheibe $K_1(0)$ holomorph und es gilt

$$f^{(k)}(0) = k!.$$

- Der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1} \cdot n} \cdot z^n$ ist

$$r = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3^{n+1} \cdot n}{2^n}} = \frac{3}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3n} = \frac{3}{2}.$$

Sie definiert mithin eine auf $K_{\frac{3}{2}}(0)$ holomorphe Funktion.

B) Der Wirtinger-Kalkül

Bemerkung 2.10 (Wirtinger-Kalkül)

Ist eine komplexe Funktion $f = u + iv$ mit $u, v : D \rightarrow \mathbb{R}$ in \mathbf{a} partiell differenzierbar, so können wir mit

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

die *Wirtinger-Ableitungen*

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

definieren. Dieser Definition liegt folgende Idee zugrunde: mittels der Transformation

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2i} & -\frac{1}{2i} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

werden die Koordinaten (z, \bar{z}) in die Koordinaten (x, y) überführt. Schreibt man eine Funktion f in den Koordinaten (x, y) nun als Funktion in (z, \bar{z}) , so erwartet man mit der Kettenregel für die Ableitung von f

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2i} & -\frac{1}{2i} \end{pmatrix},$$

und erhält so die Formeln für die Wirtinger-Ableitungen. Man beachte, daß dies nur eine Motivation und keine formale Herleitung ist, da z und \bar{z} keine unabhängigen Variablen sind!

Die Wirtinger-Ableitungen verhalten sich aber wie gewöhnliche Ableitungen und als seien die Variablen z und \bar{z} unabhängig:

- $\frac{\partial z}{\partial z} = 1$, $\frac{\partial z}{\partial \bar{z}} = 0$, $\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}} = 1$.
- $\frac{\partial}{\partial z}$ und $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ genügen wie die komplexe Ableitung der Linearität, der Produktregel und der Quotientenregel (siehe Proposition 2.5).

Dabei ist der Wirtinger-Kalkül für uns wegen der folgenden Aussage interessant, die wir als Proposition formulieren wollen und die eine zusätzliche Rechtfertigung für die Notation $\frac{\partial f}{\partial z}$ ist.

Proposition 2.11 (Wirtinger-Kalkül)

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ eine offen und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ reell total differenzierbar in $\mathbf{a} \in D$.

Genau dann ist f in \mathbf{a} komplex differenzierbar, wenn $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\mathbf{a}) = 0$. Zudem gilt dann

$$f'(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{a}).$$

Beweis: Die Aussage folgt unmittelbar aus der Definition der Wirtinger-Ableitungen und den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen 2.2. \square

Beispiel 2.12

- a. Aus $\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}} = 1$ folgt wieder unmittelbar, daß die komplexe Konjugation nirgendwo komplex differenzierbar ist.
- b. Betrachten wir die Funktion

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : x + iy \mapsto x^2 + i \cdot y^2$$

aus Beispiel 2.4 noch einmal, so können wir sie umschreiben als

$$f(z, \bar{z}) = \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right)^2 + i \cdot \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right)^2 = \frac{(z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2) - i \cdot (z^2 - 2z\bar{z} + \bar{z}^2)}{4}$$

und erhalten dann

$$0 = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{(2z + 2\bar{z}) + i \cdot (2z - 2\bar{z})}{4} = \operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(z)$$

genau für

$$\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z).$$

Der Wirtinger-Kalkül zeigt also ebenfalls, daß die Funktion genau entlang der Winkelhalbierenden komplex differenzierbar ist.

- c. Die Funktion

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \cos(\bar{z})$$

hat die Wirtinger-Ableitung

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = -\sin(\bar{z}),$$

deren Nullstellen genau die Zahlen

$$z \in \{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

sind. Die Funktion f ist also genau in den ganzzahligen Vielfachen von 2π komplex differenzierbar.

Aufgaben

Aufgabe 2.13

Bestimme alle Punkte, in denen die Funktion

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \operatorname{Re}(z)^2 + 2 \cdot \operatorname{Im}(z) + i \cdot |z|^2$$

komplex differenzierbar ist.

Aufgabe 2.14

Zeige mittels der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, daß die Funktion

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \exp(z^2 + 1)$$

ganz ist.

Aufgabe 2.15

Es $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f = u + i \cdot v : G \rightarrow \mathbb{C}$ sei holomorph. Was muß für u und v gelten, daß auch $\bar{f} = u - i \cdot v$ holomorph ist?

Aufgabe 2.16

Überprüfe, ob die Funktion

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \begin{cases} \frac{z^5}{|z|^4}, & \text{für } z \neq 0, \\ 0, & \text{für } z = 0, \end{cases}$$

den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen in $a = 0$ genügt und ob sie dort komplex differenzierbar ist.

§ 3 Harmonische und konforme Abbildungen

In diesem Abschnitt werden wir einige Anwendungen holomorpher Funktionen etwa als konforme Transformationen kennen lernen.

Definition 3.1 (Harmonische Funktionen / Potentiale)

Eine auf einer offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ zweifach stetig differenzierbare Funktion $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *harmonisch* oder ein *Potential*, wenn der Laplace-Operator Δ angewendet auf u die Nullfunktion ist, d.h.

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Proposition 3.2

Realteile und Imaginärteile holomorpher Funktionen sind harmonisch.

Beweis: Im Vorgriff auf spätere Kapitel wollen wir schon voraussetzen, daß holomorphe Funktionen beliebig oft komplex differenzierbar sind, so daß ihre Real- und Imaginärteile auch beliebig oft reell differenzierbar sind. Für eine holomorphe Funktion

$$f = u + i \cdot v : D \rightarrow \mathbb{C}$$

gilt dann wegen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sowie dem Satz von Schwarz

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \end{aligned}$$

Die Aussage für v zeigt man analog. □

Bemerkung 3.3 (Harmonische Funktionen)

Auf einfach zusammenhängenden Gebieten gilt auch die Umkehrung obiger Aussage, d.h. ist $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch und $D \subseteq \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend, dann ist u Realteil einer holomorphen Funktion $f = u + i \cdot v : D \rightarrow \mathbb{C}$. Man nennt v eine *harmonisch konjugierte* Funktion zu u , und sie ist bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt.

Man beachte auch, daß die Niveaulinien

$$\{u = \text{konst.}\}$$

einer harmonischen Funktion und die Niveaulinien

$$\{v = \text{konst.}\}$$

einer zugehörigen harmonisch konjugierten Funktion stets senkrecht aufeinander stehen. Das folgt aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, weil der Normalenvektor an $\{u = \text{konst.}\}$ in einem Punkt z durch den Gradienten

$$\nabla u(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(z), \frac{\partial u}{\partial y}(z) \right)$$

gegeben ist und der Normalenvektor an $\{v = \text{konst.}\}$ entsprechend durch

$$\nabla v(z) = \left(\frac{\partial v}{\partial x}(z), \frac{\partial v}{\partial y}(z) \right) = \left(-\frac{\partial u}{\partial y}(z), \frac{\partial u}{\partial x}(z) \right),$$

so daß deren Skalarprodukt 0 ergibt. Dies greifen wir in Bemerkung 3.7 wieder auf, wenn wir die Niveaulinien von u als Äquipotentiallinien eines elektrischen Feldes interpretieren und die Niveaulinien von v als die zugehörigen Feldlinien.

Beispiel 3.4 (Harmonisch konjugierte Funktion)

Die Funktion

$$u : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} : x + iy \mapsto 2xy - x + y$$

ist harmonisch, wegen

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial 2y - 1}{\partial x} + \frac{\partial 2x + 1}{\partial y} = 0 + 0 = 0.$$

Wegen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen ist die harmonisch konjugierte Funktion eine Stammfunktion

$$v = \int \frac{\partial v}{\partial y} dy = \int \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

von $\frac{\partial u}{\partial x}$ bezüglich y und zugleich eine Stammfunktion

$$v = \int \frac{\partial v}{\partial x} dx = - \int \frac{\partial u}{\partial y} dx$$

von $-\frac{\partial u}{\partial y}$ bezüglich x .

Wir erhalten also

$$v(x + iy) = \int 2y - 1 dy = y^2 - y + c(x)$$

und

$$v(x + iy) = - \int 2x + 1 dx = -x^2 - x + d(y).$$

Man beachte, daß die Integrationskonstante $c(x)$ beim ersten Integral von der Nicht-Integrationsvariablen x abhängt und entsprechend im zweiten Fall $d(y)$ von y . Durch Gleichsetzen erhalten wir

$$c(x) = -x^2 - x$$

und

$$d(y) = y^2 - y$$

als mögliche Lösung, und mithin

$$v(x + iy) = y^2 - x^2 - y - x.$$

Die zugehörige holomorphe Funktion ist dann

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : x + iy \mapsto (2xy - x + y) + i \cdot (y^2 - x^2 - y - x).$$

Es handelt sich dabei in der Tat um eine Polynomfunktion in z ,

$$f(z) = -i \cdot z^2 - (1 + i) \cdot z.$$

Definition 3.5 (\mathcal{C}^1 -Kurven)

- a. Eine auf einem Intervall I stetig differenzierbare Abbildung $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt auch ein \mathcal{C}^1 -Weg und ihr Bild eine \mathcal{C}^1 -Kurve, die sogenannte *Spur* von γ .

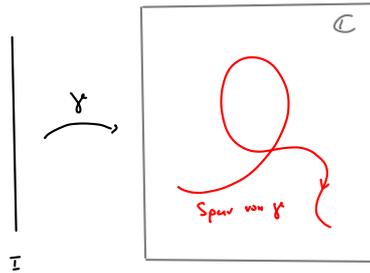


ABBILDUNG 3. Ein \mathcal{C}^1 -Weg γ und seine Spur

- b. Ist der Gradient $\gamma'(t) = \text{Re}(\gamma)'(t) + i \cdot \text{Im}(\gamma)'(t) \hat{=} (\text{Re}(\gamma)'(t), \text{Im}(\gamma)'(t))^t$ nicht Null, so nennt man die Gerade durch $\gamma(t)$ mit dem Gradienten als Richtungsvektor auch die Tangente an die Kurve im Punkt $\gamma(t)$ (siehe Abbildung 4).

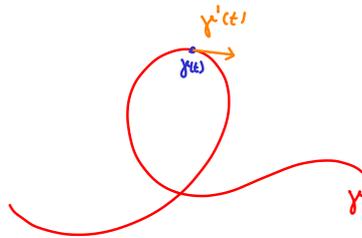


ABBILDUNG 4. Die Tangentialrichtung einer \mathcal{C}^1 -Kurve in einem Punkt

- c. Schneiden sich zwei \mathcal{C}^1 -Kurven γ und ω in einem Punkt $P = \gamma(t) = \omega(s)$, so nennt man den Winkel

$$\arccos \left(\frac{\langle \gamma'(t), \omega'(s) \rangle}{|\gamma'(t)| \cdot |\omega'(s)|} \right) = \arccos \left(\frac{\text{Re}(\gamma'(t) \cdot \overline{\omega'(s)})}{|\gamma'(t)| \cdot |\omega'(s)|} \right),$$

den die Tangenten einschließen, den *Winkel*, in dem die Kurven sich schneiden (siehe Abbildung 5). Man sagt, daß sich die Kurven *senkrecht* oder *normal*

schneiden, wenn sie sich in einem rechten Winkel $\alpha = \frac{\pi}{2}$ schneiden, d.h. wenn $\operatorname{Re}(\gamma'(t) \cdot \overline{\omega'(s)}) = 0$.

Das Vorzeichen der Determinante

$$\det \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\gamma'(t)) & \operatorname{Re}(\omega'(s)) \\ \operatorname{Im}(\gamma'(t)) & \operatorname{Im}(\omega'(s)) \end{pmatrix} = \operatorname{Im}(\gamma'(t) \cdot \overline{\omega'(s)})$$

nennen wir die *Orientierung* des Winkels.

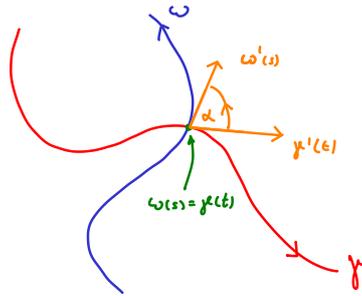


ABBILDUNG 5. Winkel α zwischen zwei \mathcal{C}^1 -Kurven mit Orientierung

Beispiel 3.6

Betrachten wir die Wege

$$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}: t \mapsto t$$

und

$$\omega: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}: t \mapsto i \cdot t,$$

so schneiden sie sich nur im Punkt

$$\gamma(0) = \omega(0) = 0$$

und der Winkel dort ist

$$\arccos(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Die Kurven scheiden sich also, wie erwartet, senkrecht mit positiver Orientierung,

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Bemerkung 3.7 (Komplexe Potentiale in der Elektrostatik)

In einem zeitunabhängigen und deshalb konservativen elektrischen Feld E stehen die Äquipotentiallinien senkrecht auf den Feldlinien, da diese in Richtung des steilsten Anstiegs zeigen, d.h. in Richtung des Gradienten (siehe Abbildung 7). Sein Potential ist in ladungsfreien Bereichen zudem harmonisch und die Niveaulinien der harmonisch konjugierten Funktion sind deshalb die Feldlinien.

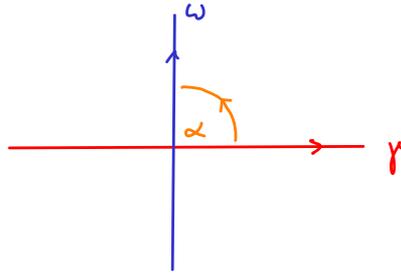


ABBILDUNG 6. Zwei orthogonale Kurven

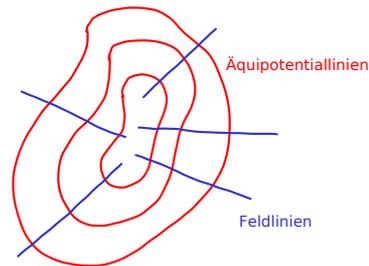


ABBILDUNG 7. Die Feldlinien stehen senkrecht auf den Äquipotentiallinien.

Um unsere Standardnotation beizubehalten, bezeichnen wir das Potential des Feldes mit u und identifizieren das Vektorfeld E dann mit der komplexen Funktion

$$E(x + iy) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \overline{f'(x + iy)},$$

wenn $f = u + i \cdot v$ die holomorphe Funktion zum Potential u ist. Man nennt f dann auch das *komplexe Potential*.

Wir wollen uns nun im Beispiel einer *Punktladung* anschauen, was u und was die harmonisch konjugierte Funktion v ist.

Bei einer *Punktladung* sind die Äquipotentiallinien konzentrische Kreise um die Ladung, die wir uns im Ursprung liegend denken wollen. Da die Feldlinien senkrecht auf den Äquipotentiallinien stehen, sind sie also Halbgeraden, die vom Ursprung weg laufen (siehe Abbildung 8). Das Vektorfeld E können wir also als

$$E(z) = \frac{z}{|z|^2}$$

annehmen und für das komplexe Potential f gilt dann

$$f'(z) = \overline{E(z)} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z}.$$

Daraus ergibt sich für das komplexe Potential der Logarithmus

$$f(z) = \ln(z) = \ln|z| + i \cdot \arg(z).$$

Die zum Potential harmonisch konjugierte Funktion $v(z) = \arg(z)$ beschreibt also den Verlauf der Feldlinien.

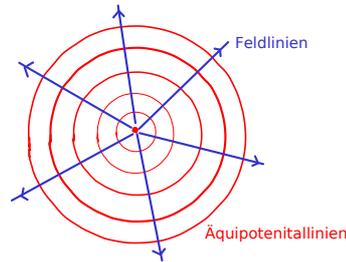


ABBILDUNG 8. Die Feldlinien und Äquipotentiallinien einer Punktladung

Hieraus kann man das komplexe Potential für einen *Dipol* ableiten, bei dem eine positive Ladung in \mathbf{a} und eine entsprechende negative Ladung in $-\mathbf{a}$ liegt (siehe Abbildung 9),

$$f(z) = \ln(z - \mathbf{a}) - \ln(z + \mathbf{a}) = \ln\left(\frac{z - \mathbf{a}}{z + \mathbf{a}}\right),$$

sowie das komplexe Potential zweier konzentrischer Kreise und damit eines *Koaxial-*

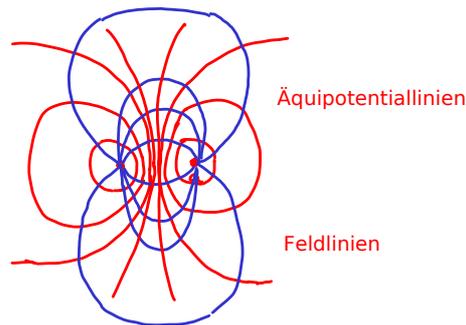


ABBILDUNG 9. Die Feldlinien und Äquipotentiallinien eines Dipols

kabels, bei denen der innere Kreis mit Radius r das Potential V habe und der äußere Kreis mit Radius 1 das Potential 0 (siehe Abbildung 10),

$$f(z) = V \cdot \frac{\ln(z)}{\ln(r)}.$$

Definition 3.8 (Konforme Abbildungen)

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ sei eine komplexe Funktion. Wir nennen f eine *lokal konforme Abbildung*, wenn sie winkel- und orientierungstreu ist, d.h. wenn für jeden Punkt $\mathbf{a} \in D$ und für je zwei \mathcal{C}^1 -Kurven γ und ω , die sich in \mathbf{a} schneiden, der Winkel zwischen γ und ω in \mathbf{a} und der Winkel zwischen $f \circ \gamma$ und $f \circ \omega$ in $f(\mathbf{a})$ übereinstimmen und wenn beide dieselbe Orientierung haben. Ist f zudem injektiv, so nennen wir f *konform*.

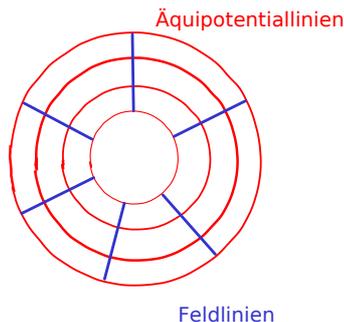


ABBILDUNG 10. Feld- und Äquipotentiallinien zweier konzentrischer Kreise

Beispiel 3.9

Die komplexe Konjugation

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \bar{z}$$

ist als Spiegelung an der x -Achse winkeltreu, aber nicht orientierungstreu. Dazu betrachten wir die Kurven aus Beispiel 3.6 und stellen fest, daß sich die Orientierung des Winkels geändert hat, weil die Kurve ω an der x -Achse gespiegelt wird (siehe Abbildung 11). Sie ist mithin nicht lokal konform.

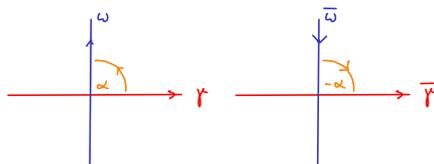


ABBILDUNG 11. Die komplexe Konjugation ist nicht orientierungstreu.

Proposition 3.10 (Lokal konforme Abbildungen)

Eine komplexe Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann lokal konform, wenn f holomorph mit $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in D$ ist.

Beweisidee: Man beachte, daß wegen der Kettenregel

$$(f \circ \gamma)'(t) = f'(a) \cdot \gamma'(t)$$

und

$$(f \circ \omega)'(s) = f'(a) \cdot \omega'(s)$$

für $\gamma(t) = \omega(s) = a$ gilt. Winkel und Orientierung sind dann durch

$$\begin{aligned} \frac{(f \circ \gamma)'(t) \cdot \overline{(f \circ \omega)'(s)}}{|(f \circ \gamma)'(t)| \cdot |(f \circ \omega)'(s)|} &= \frac{f'(a) \cdot \gamma'(t) \cdot \overline{f'(a) \cdot \omega'(s)}}{|f'(a)| \cdot |\gamma'(t)| \cdot |f'(a)| \cdot |\omega'(s)|} \\ &= \frac{|f'(a)|^2 \cdot \gamma'(t) \cdot \overline{\omega'(s)}}{|f'(a)|^2 \cdot |\gamma'(t)| \cdot |\omega'(s)|} = \frac{\gamma'(t) \cdot \overline{\omega'(s)}}{|\gamma'(t)| \cdot |\omega'(s)|} \end{aligned}$$

festgelegt und stimmen mithin überein. □

Beispiel 3.11

Die offene Menge

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\} \setminus \{iy \mid 0 \leq y \leq 1\}$$

ist die obere Halbebene ohne die Strecke zwischen 0 und i (siehe Abbildung 12). Die

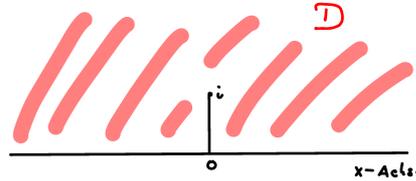


ABBILDUNG 12. Die Menge $D = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\} \setminus \{iy \mid 0 \leq y \leq 1\}$

komplexe Funktion

$$h : D \longrightarrow \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\} : z \mapsto \sqrt{z^2 + 1}$$

ist holomorph auf D als Verkettung holomorpher Funktionen, wenn $\sqrt{\cdot}$ den Zweig der Wurzelfunktion bezeichnet, der seine Werte in der oberen Halbebene annimmt. Für die Ableitung gilt zudem

$$h'(z) = \frac{z}{\sqrt{z^2 + 1}} \neq 0$$

für alle $z \in D$, so daß h eine lokal konforme Abbildung ist. Man kann sogar zeigen, daß h bijektiv ist, und die Umkehrabbildung h^{-1} ist dann wegen der Kettenregel wieder eine lokal konforme Abbildung (siehe Abbildung 13).

Bemerkung 3.12 (Konforme Abbildungen in der Elektrostatik – Blitzableiter)

Wenn eine lokal konforme Abbildung bijektiv auf ihr Bild ist, dann kann man sie als winkel- und orientierungstreue Koordinatentransformation verwenden und damit z.B. elektrische Felder ineinander überführen.

Während eine Gewitters hat man über der Erdoberfläche ein Potential, das in einem vereinfachten Modell mit der Höhe linear zunimmt. In einem zweidimensionalen Schnitt können wir die Erdoberfläche lokal als x -Gerade annehmen und erhalten für das Potential dann bis auf einen konstanten Faktor

$$u(x + iy) = y$$

und für das komplexe Potential entsprechend

$$f(z) = -i \cdot z.$$

Die lokal konforme Abbildung h^{-1} aus Beispiel 3.11 kann dann verwendet werden, um das elektrische Feld zu transformieren (siehe Abbildung 13). Als Ergebnis erhalten wir das typische Feld eines Blitzableiters. Will man dieses untersuchen, kann man mit Hilfe von h zu dem Feld mit linearem Potential übergehen, dort rechnen und dann mit h^{-1} rücktransformieren.

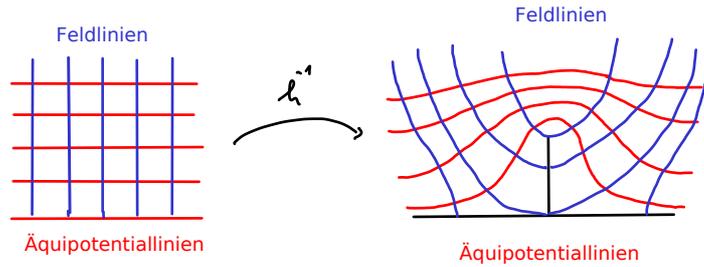


ABBILDUNG 13. Transformation eines elektrischen Feldes — Blitzableiter

Beispiel 3.13 (Eine Möbiustransformation als konforme Abbildung)

Sind $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ Zahlen mit $c \neq 0$ $ad - bc \neq 0$, so ist die Abbildung¹

$$f: \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

holomorph und ihre Ableitung

$$f'(z) = \frac{a \cdot (cz + d) - c \cdot (az + b)}{(cz + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}$$

ist stets ungleich Null. Also ist f lokal konform. Das Bild von f ist die Menge

$$D = \left\{ f(z) \mid z \neq -\frac{d}{c} \right\} = \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{a}{c} \right\}$$

und f besitzt auf D die Umkehrabbildung

$$f^{-1}: D \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \frac{dz - b}{-z + a},$$

wie man durch Einsetzen leicht verifiziert. Damit ist f also eine konforme Abbildung.

Man nennt diese Abbildungen *Möbiustransformationen* der komplexen Ebene. Die haben die gute Eigenschaft, daß Kreise, die nicht durch $-\frac{d}{c}$ gehen, wieder auf Kreise abgebildet werden. So bildet die Möbiustransformation

$$f(z) = \frac{z - b}{bz - 1}$$

mit

$$b = \frac{19 - \sqrt{105}}{16}$$

den Kreis $K_1(0)$ auf sich selbst ab, während der Kreis $K_{\frac{1}{4}}(\frac{1}{2})$ auf $K_r(0)$ mit

$$r = \frac{13 - \sqrt{105}}{8}$$

abgebildet wird. Zwei nicht-konzentrische Kreise werden so in zwei konzentrische Kreise überführt. Sehen wir die ursprünglichen Kreise als Querschnitt durch zwei Zylinder an, so können wir das Potential der Konfiguration auf das Potential zweier konzentrischer Kreise und damit auf das Potential von Punktladungen zurückführen. Transformieren wir das Potential

¹Beachte, für $c = 0$ sind f und f^{-1} auf ganz \mathbb{C} definiert.

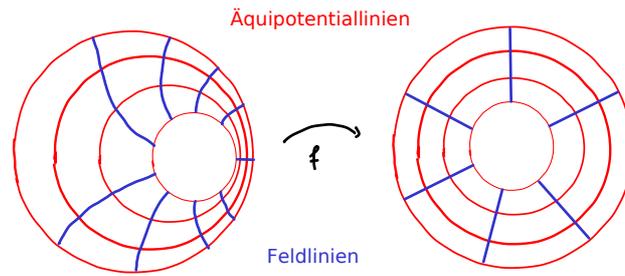


ABBILDUNG 14. Ein elektrisches Feld unter einer Möbiustransformation

$$z \mapsto V \cdot \frac{\ln(z)}{\ln(r)}$$

mittels der Umkehrabbildung von f , so erhalten wir als Potential für die ursprüngliche Konfiguration

$$f(z) = f(x + iy) = \frac{V}{\ln(r)} \cdot \ln \left(\frac{(x - b)^2 + y^2}{(bx - 1)^2 + b^2 y^2} \right).$$

Aufgaben

Aufgabe 3.14

Zeige, daß die Funktion

$$u : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} : x + iy \mapsto 2x \cdot (1 - y)$$

harmonisch ist und berechne die harmonisch konjugierte Funktion v . Ferner gebe man die $f = u + i \cdot v$ als Funktionsvorschrift in der Variablen $z = x + iy$ an.

Aufgabe 3.15

Zeige, daß die Funktion

$$u : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} : x + iy \mapsto e^x \cdot (x \cos(y) - y \sin(y))$$

harmonisch ist und bestimme eine harmonisch konjugierte Funktion zu u .

Aufgabe 3.16

Wir betrachten die komplexe Funktion

$$h : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \frac{1}{2} \cdot \left(z + \frac{1}{z} \right).$$

- Zeige, daß das Bild des Einheitskreises $\partial K_1(0)$ unter h das Intervall $[-1, 1]$.
- Zeige, daß das Bild des Kreises $\partial K_r(0)$ für $r \neq 1$ ist eine Ellipse und bestimme die zugehörige Ellipsengleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

- c. Zeige, daß die Einschränkung

$$h_1 : K_1(0) \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus [-1, 1] : z \mapsto \frac{1}{2} \cdot \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

auf die offene Kreisscheibe $K_1(0)$ eine konforme Abbildung ist.

Aufgabe 3.17

- a. Zeige, daß eine Teilmenge K von \mathbb{C} genau dann ein Kreis ist, wenn es Zahlen $a, c \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{C}$ gibt mit $a \neq 0$, $|b|^2 - ac > 0$ und

$$K = \{z \in \mathbb{C} \mid a \cdot z \cdot \bar{z} + b \cdot z + \bar{b} \cdot \bar{z} + c = 0\}.$$

- b. Zeige, daß die *Inversion am Kreis*

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \frac{1}{z}$$

Kreise in ihrem Definitionsbereich auf Kreise abbildet.

- c. Zeige, eine allgemeine Möbiustransformation

$$g : \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

mit $ad - bc \neq 0$ läßt sich stets als Verkettung Translationen, Drehstreckungen und einer Inversion am Kreis schreiben.

- d. Zeige, daß jede Möbiustransformation eine konforme Abbildung ist und Kreise in ihrem Definitionsbereich in Kreise überführt.

Der Cauchysche Integralsatz und seine Anwendungen

§ 4 Komplexe Kurvenintegrale und der Cauchysche Integralsatz

Der Cauchysche Integralsatz ist besagt im wesentlichen, daß das Kurvenintegral holomorpher Funktionen über einfach zusammenhängenden Gebieten wegunabhängig ist. Dies kann als eine Art Hauptsatz- der Differential und Integralrechnung für die komplexe Analysis angesehen werden.

A) Komplexe Kurvenintegrale

Wir wollen hier zunächst den Begriff des komplexen Kurven- oder Wegintegrals einführen.

Definition 4.1 (Komplexe Kurvenintegrale)

- a. Ist $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein stetiger Weg, so definieren wir das Integral

$$\int_a^b \gamma(t) dt := \int_a^b \operatorname{Re}(\gamma)(t) dt + i \cdot \int_a^b \operatorname{Im}(\gamma)(t) dt.$$

- b. Ist $\gamma : [a, b] \rightarrow G \subseteq \mathbb{C}$ ein \mathcal{C}^1 -Weg und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige komplexe Funktion, dann definieren wir das *komplexe Kurvenintegral* oder *Wegintegral*

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt,$$

wobei wir beachten, daß

$$[a, b] \rightarrow \mathbb{C} : t \mapsto f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

ein stetiger Weg in \mathbb{C} ist, so daß das Integral gemäß a. definiert ist. Wir nennen

$$l(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

die *Bogenlänge* des Weges.

- c. Ein stetiger Wege $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *stückweise stetig differenzierbar* oder ein *stückweise \mathcal{C}^1 -Weg*, wenn es eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ von $[a, b]$ in endlich viele Teilintervalle $[t_{i-1}, t_i]$ gibt, so daß $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ stetig differenzierbar ist.

Das *komplexe Kurvenintegral* in b. läßt sich auf einen solche Weg verallgemeinern als

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

Gleiches gilt für die *Bogenlänge*

$$l(\gamma) := \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\gamma'(t)| dt.$$

Lemma 4.2 (Kurvenintegrale hängen nur von der Spur des Weges ab.)

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ ein stückweise C^1 -Weg, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ stetig differenzierbar mit $\varphi(c) = a$ und $\varphi(d) = b$, dann gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma \circ \varphi} f(z) dz.$$

Insbesondere hängen Kurvenintegrale nur von der Spur und Orientierung des Weges, nicht aber von der gewählten Parametrisierung der Spur ab (siehe dazu auch Beispiel 7.1) und man schreibt deshalb auch einfach

$$\int_{\Gamma} f(z) dz := \int_{\gamma} f(z) dz,$$

wenn $\Gamma = \gamma([a, b])$ die Spur von γ ist.

Beweis: Dies folgt aus der Kettenregel und Substitutionsregel mit der Substitution $s = \varphi(t)$:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma \circ \varphi} f(z) dz &= \int_c^d f(\gamma(\varphi(t))) \cdot (\gamma \circ \varphi)'(t) dt \\ &= \int_c^d f(\gamma(\varphi(t))) \cdot \gamma'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt \\ &= \int_a^b f(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s) ds \\ &= \int_{\gamma} f(z) dz. \end{aligned}$$

□

Beispiel 4.3

Wir betrachten die komplexe Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \frac{1}{z - z_0}$$

und den Weg

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} : t \mapsto z_0 + r \cdot e^{2\pi i t},$$

dessen Spur der Rand der Kreisscheibe $K_r(z_0)$ vom Radius r um z_0 ist (siehe Ab-

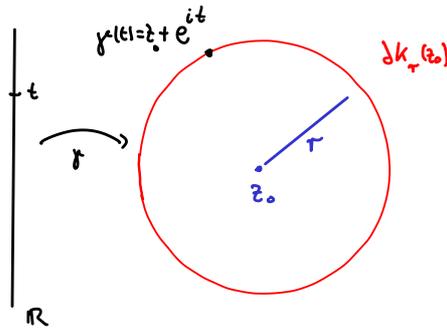


ABBILDUNG 1. Parametrisierung des Kreises $K_r(z_0)$

bildung 1). Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{\partial K_r(z_0)} \frac{1}{z - z_0} dz &= \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\gamma(t) - z_0} \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{r \cdot e^{2\pi i t}} \cdot 2\pi i r \cdot e^{2\pi i t} dt \\ &= \int_0^1 2\pi i dt = 2\pi i, \end{aligned}$$

weil

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= r \cdot \left(\frac{\partial(\cos(2\pi t))}{\partial t} + i \cdot \frac{\partial(\sin(2\pi t))}{\partial t} \right) \\ &= r \cdot (-2\pi \sin(2\pi t) + i \cdot 2\pi \cos(2\pi t)) = 2\pi i r \cdot e^{2\pi i t}. \end{aligned}$$

Man beachte, daß das Integral damit unabhängig vom Radius des Kreises ist!

Die Bogenlänge des Weges berechnet sich zudem als

$$l(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)| dt = \int_0^1 |2\pi i r e^{2\pi i t}| dt = \int_0^1 2\pi r dt = 2\pi r.$$

Will man den Wert eines Integrals nach oben abschätzen, so kann man dazu in der reellen eindimensionalen Analysis die Obersumme verwenden, bei der man das Intervall nicht unterteilt hat. Man erhält als Wert das Produkt aus dem maximalen Funktionswert und der Länge des Integrationsintervalls. Das folgende Lemma ist eine naheliegende Verallgemeinerung dieses Sachverhalts.

Lemma 4.4 (Abschätzung des Kurvenintegrals)

Ist $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ ein stückweise C^1 -Weg und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, dann gilt

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq l(\gamma) \cdot \max_{z \in \gamma([a, b])} |f(z)|.$$

Beweis: Das stetige Bild der kompakten Menge $[a, b]$ ist kompakt in $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ und die stetige Funktion $|f|$ nimmt auf dieser kompakten Menge deshalb ihr Maximum

an. Insofern ist das Maximum auf der rechten Seite definiert. Aus der Dreiecksungleichung für Integrale folgt dann

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) \, dz \right| &= \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)| \, dt \\ &\leq \int_a^b \max_{z \in \gamma([a,b])} |f(z)| \cdot |\gamma'(t)| \, dt = \max_{z \in \gamma([a,b])} |f(z)| \cdot l(\gamma). \end{aligned}$$

□

B) Kurvenintegrale und Stammfunktionen

Definition 4.5 (Stammfunktion)

Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine komplexe Funktion. Wir nennen eine holomorphe Funktion $F : D \rightarrow \mathbb{C}$ mit $F' = f$ eine *Stammfunktion* von f .

Satz 4.6 (Stammfunktionen garantieren Wegunabhängigkeit)

Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $F : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine Stammfunktion der stetigen Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ und $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ ein stückweise C^1 -Weg, dann gilt

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Insbesondere hängt das Kurvenintegral nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges ab, und falls γ geschlossen ist gilt

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = 0.$$

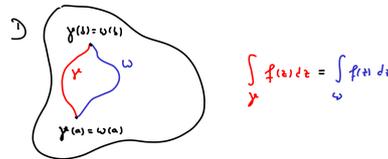


ABBILDUNG 2. Wegunabhängigkeit des Integrals

Beweisidee: Die Aussage folgt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung angewandt auf den Real- und Imaginärteil der zu integrierenden Funktion:

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt = \int_a^b (F(\gamma(t)))' \, dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

□

Beispiel 4.7 (Stammfunktionen von $z \mapsto z^n$)

a. Wir wollen das Integral

$$\int_{\gamma} \sin(z) \, dz$$

berechnen, wobei γ ein Streckenzug von $-\pi$ über $-\pi + i$ und $\pi + i$ nach π sein soll (siehe Abbildung 3). Der Sinus besitzt den Cosinus als Stammfunktion. Es gilt also

$$\int_{\gamma} \sin(z) \, dz = -\cos(\pi) - (-\cos(-\pi)) = 1 - 1 = 0.$$

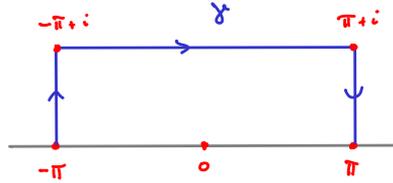


ABBILDUNG 3. Streckenzug von $-\pi i$ über $-\pi i + i$ und $\pi + i$ nach π

b. Wir betrachten die komplexe Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto z^n$$

für ein $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ mit Stammfunktion

$$F : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \frac{z^{n+1}}{n+1}$$

und einen beliebigen stückweisen \mathcal{C}^1 -Weg $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$. Dann gilt

$$\int_{\gamma} z^n \, dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = \frac{\gamma(b)^{n+1} - \gamma(a)^{n+1}}{n+1}.$$

Ist der Weg geschlossen, d.h. ist $\gamma(a) = \gamma(b)$, so ist das Kurvenintegral 0. Insbesondere erhalten wir also für das Integral über den Rand einer Kreisscheibe um den Ursprung

$$\int_{\partial K_r(0)} z^n \, dz = 0.$$

Man beachte, daß wir in Beispiel 4.3, daß dies für $n = -1$ nicht der Fall ist,

$$\int_{\partial K_r(0)} \frac{1}{z} \, dz = 2\pi i.$$

Damit besitzt die Funktion

$$\mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \frac{1}{z}$$

auch keine Stammfunktion auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Beispiel 4.8 (Eine Funktion ohne Stammfunktion)

Betrachten wir die komplexe Funktion

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto |z|$$

und beiden Wege

$$\gamma : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{C} : t \mapsto t$$

und

$$\omega : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{C} : t \mapsto e^{(\pi-t) \cdot i}$$

mit Endpunkten

$$\gamma(-1) = \omega(0) = -1$$

und

$$\gamma(1) = \omega(\pi) = 1.$$

Dann erhalten wir

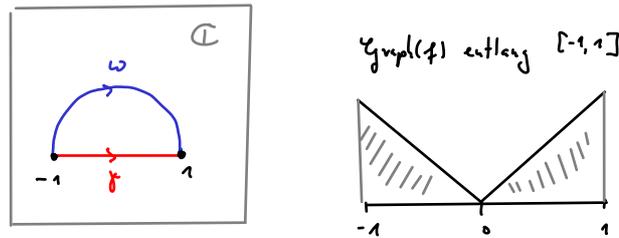


ABBILDUNG 4. Integration der Betragsfunktion

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{-1}^1 |t| dt = 1,$$

und wegen $|\omega(t)| = 1$ dann

$$\int_{\omega} f(z) dz = \int_0^{\pi} |\omega(t)| \cdot \omega'(t) dt = \int_0^{\pi} \omega'(t) dt = \omega(\pi) - \omega(0) = 1 - (-1) = 2.$$

Die Funktion f besitzt also keine Stammfunktion, da die beiden Kurvenintegrale nicht übereinstimmen, obwohl die Wege den gleichen Anfangs- und Endpunkt haben.

Satz 4.9 (Integrabilitätskriterien)

Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig.

- f hat genau dann eine Stammfunktion, wenn $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ für jeden geschlossenen stückweise C^1 -Weg γ in G .
- Ist G sternförmig und ist $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$ für jedes Dreieck Δ in G , so hat f eine Stammfunktion.

Beweisidee: Man wählt einen festen Punkt $a \in G$ und für jeden Punkt $z \in G$ wählt man einen stückweise C^1 -Weg γ_z von a nach z . (Ist G sternförmig, so kann man a so wählen, daß die γ_z die Strecke von a nach z ist.) Die Stammfunktion von f wird dann durch

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(w) dw$$

definiert. Für z nahe bei z_0 ist dann die Strecke $\overrightarrow{zz_0}$ von z nach z_0 ganz in G und wir erhalten einen geschlossenen Weg

$$-\gamma_{z_0} + \gamma_z + \overrightarrow{zz_0}$$

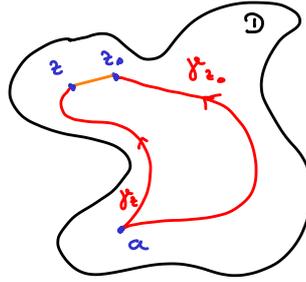


ABBILDUNG 5. Der Weg im Beweis des Cauchyschen Integralsatzes

mit Start- und Endpunkt z_0 , wenn $-\gamma_{z_0}$ den Weg γ_{z_0} in umgekehrter Richtung durchläuft und $+$ die Wege aneinander hängt. (Im Fall eines sternförmigen Gebietes ist dieser Weg der Rand eines Dreiecks in G .) Damit ist dann

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\gamma_{z_0}} f(w) \, dw + \int_{\gamma_z} f(w) \, dw + \int_{\overrightarrow{zz_0}} f(w) \, dw \\ &= F(z) - F(z_0) + \int_0^1 f(z + t \cdot (z_0 - z)) \cdot (z_0 - z) \, dt, \end{aligned}$$

woraus wir

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \int_0^1 f(z + t \cdot (z_0 - z)) \, dt \longrightarrow f(z_0)$$

für den Grenzwert $z \rightarrow z_0$ ableiten. □

C) Der Cauchysche Integralsatz

Satz 4.10 (Cauchyscher Integralsatz)

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = 0$$

für jeden geschlossenen stückweise C^1 -Weg γ in G und f besitzt eine Stammfunktion auf G .

Beweisidee: Man beweist zunächst, daß

$$\int_{\partial\Delta} f(z) \, dz = 0$$

für ein Dreieck Δ in G richtig ist, indem man das Dreieck sukzessive in kleinere Dreiecke zerlegt, die Dreiecksungleichung anwendet und geeignet abschätzt. Das ist der harte Teil des Beweises!

Für sternförmige Gebiete folgt dann aus dem Integrabilitätskriterium 4.9 unmittelbar, daß f eine Stammfunktion besitzt und damit folgt aus Satz 4.6 dann auch, daß

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = 0$$

für beliebige geschlossene stückweise \mathcal{C}^1 -Wege in G .

Um die Aussage auch für allgemeine einfach zusammenhängende Gebiete zu erhalten, überlegt man sich zunächst, daß

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

gilt, wenn γ der Rand des stetig differenzierbaren Bildes eines Dreiecks ist, wobei die Argumente die gleichen sind wie für Dreiecksränder. Jeder geschlossene stückweise \mathcal{C}^1 -Weg im einfach zusammenhängenden Gebiet G läßt sich dann in endlich viele solcher Bilder von Dreiecksrändern aufteilen. \square

Beispiel 4.11 (Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes)

Die Funktion

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto e^{\sin(\cos(z+1)) - z^2 \cdot \cos(\sin(z-1))}$$

ist als Verkettung holomorpher Funktionen holomorph auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet \mathbb{C} . Ist

$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C} : t \mapsto e^{it}$$

eine Parametrisierung der Kreises vom Radius 1, so folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz, daß

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Beispiel 4.12 (Der Hauptzweig des Logarithmus)

Die geschlitzte Ebene

$$G = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} \mid z \leq 0\}$$

ist einfach zusammenhängend, sie ist sogar sternförmig. Die Funktion

$$f : G \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \frac{1}{z}$$

ist holomorph auf G . Für $z \in G$ mit $r = |z|$ und $\alpha = \arg(z) \in (-\pi, \pi)$ betrachten wir den stückweisen \mathcal{C}^1 -Weg

$$\gamma_z : [-1, 1] \longrightarrow G : t \mapsto \begin{cases} (1+t) \cdot r - t, & \text{für } t \leq 0, \\ r \cdot e^{i\alpha t}, & \text{für } t \geq 0. \end{cases}$$

Als Stammfunktion von f erhalten wir dann die Funktion

$$F : G \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \int_{\gamma_z} f(w) dw,$$

wobei

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_z} f(w) dw &= \int_{-1}^0 \frac{1}{(r-1) \cdot t + r} \cdot (r-1) dt + \int_0^1 \frac{1}{r} \cdot e^{-i\alpha t} \cdot ir\alpha \cdot e^{i\alpha t} dt \\ &= \int_1^r \frac{1}{s} ds + \int_0^1 i\alpha dt = \ln(r) + i \cdot \alpha = \ln|z| + i \cdot \arg(z) = \ln(z). \end{aligned}$$

Wir sehen damit, daß der Hauptzweig des Logarithmus auf G eine Stammfunktion von f ist, was wir im Grunde schon aus Beispiel 2.4 wußten.

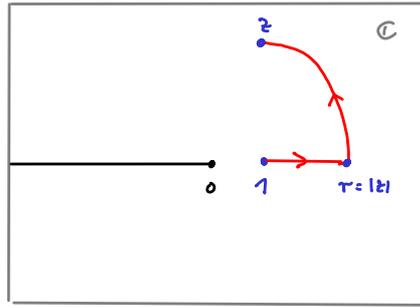


ABBILDUNG 6. Der Weg γ_z zur Berechnung des Logarithmus

Bemerkung 4.13 (Cauchyscher Integralsatz für C^1 -Bilder von Rechtecken)
 Zu fordern, daß der Definitionsbereich der Funktion f einfach zusammenhängend ist, ist eine starke Voraussetzung. Ist die Kurve γ in einem beliebigen Gebiet G der Rand des stetig differenzierbaren Bildes eines Dreiecks oder eines Rechtecks und ist $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, dann gilt auch

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Man beachte aber, daß wir hier im allgemeinen keine Stammfunktion auf G zur Verfügung haben und daß dies keine Aussage für eine beliebige Parametrisierung des Bildes von γ ist!

Bemerkung 4.14 (Homotopieinvarianz des Kurvenintegrals)
 Es seien $\gamma : [0, 1] \rightarrow G$ und $\omega : [0, 1] \rightarrow G$ zwei *homotope* geschlossene C^1 -Wege in einem Gebiet G , d.h. γ läßt sich stetig differenzierbar in ω überführen, d.h. es gibt eine stetig differenzierbare Abbildung

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$$

mit $H(0, t) = \gamma(t)$ und $H(1, t) = \omega(t)$ für alle $t \in [0, 1]$ sowie $H(s, 0) = H(s, 1)$ für alle $s \in [0, 1]$.

Für eine auf G holomorphe Funktion gilt dann stets

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\omega} f(z) dz.$$

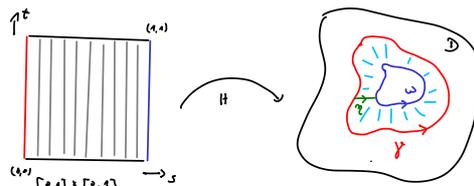


ABBILDUNG 7. Homotopieinvarianz des Integrals

Beweisidee: Das Bild von H ist das stetig differenzierbare Bild eines Rechtecks und nach Bemerkung 4.13 ist das Integral von f über seinem Rand dann Null. Der Rand setzt sich aus vier Stücken zusammen, von denen eines γ und eines $-\omega$ ist. Heißt das dritte Stück η , so ist das vierte gerade $-\eta$ und wir erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma} f(z) \, dz + \int_{-\omega} f(z) \, dz + \int_{\eta} f(z) \, dz + \int_{-\eta} f(z) \, dz \\ &= \int_{\gamma} f(z) \, dz - \int_{\omega} f(z) \, dz + \int_{\eta} f(z) \, dz - \int_{\eta} f(z) \, dz \\ &= \int_{\gamma} f(z) \, dz - \int_{\omega} f(z) \, dz. \end{aligned}$$

□

Beispiel 4.15

Ist $\mathbf{a} \in K_r(z_0)$ ein Punkt im Inneren der Kreisscheibe um z_0 mit Radius r und ist $0 < \varepsilon < r - |z_0 - \mathbf{a}|$, so gilt

$$\int_{\partial K_r(z_0)} \frac{1}{z - \mathbf{a}} \, dz = \int_{\partial K_\varepsilon(\mathbf{a})} \frac{1}{z - \mathbf{a}} \, dz = 2\pi i,$$

da die Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{\mathbf{a}\} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \frac{1}{z - \mathbf{a}}$$

holomorph ist und die beiden Kreisränder homotop ineinander überführt werden können.

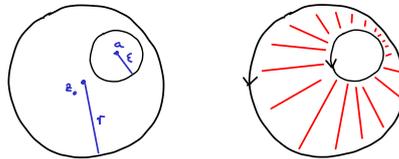


ABBILDUNG 8. Homotopie von Kreisrändern

Bemerkung 4.16 (Zirkulationsströmungen)

Zweidimensionale Strömungen inkompressibler und wirbelfreier Flüssigkeiten werden durch ein Vektorfeld w mit Potential beschrieben, so daß wir ihnen wie den elektrischen Feldern in Bemerkung 3.7 ein *komplexes Potential*

$$f = u + i \cdot v$$

zuordnen können. Die *Äquipotentiallinien* sind dann wieder durch

$$u = \text{konst.}$$

gegeben und die *Stromlinien* durch

$$v = \text{konst.}$$

Ferner erhält man das Geschwindigkeitsfeld des Flusses wieder aus der komplexen Ableitung des komplexen Potentials als

$$w(z) = w_1(z) + i \cdot w_2(z) = \overline{f'(z)}. \tag{2}$$

Bei einer *Zirkulationsströmung* sind die Stromlinien Kreislinien um den Strömungsmittelpunkt und die Äquipotentiallinien sind Halbgeraden, die von diesem Punkt wegführen. Das komplexe Potential ergibt sich also aus dem Potential der Punktladung in Bemerkung 3.7 durch Vertauschen der Rollen von Real- und Imaginärteil

$$f(z) = i \cdot k \cdot \ln(z),$$

wenn der Ursprung der Strömungsmittelpunkt ist und k eine Strömungskonstante ist. Das Geschwindigkeitsfeld

$$\overline{f'(z)} = -\frac{ik}{z}$$

ist im Strömungsmittelpunkt nicht definiert, es hat dort eine sogenannte Singularität (siehe Abschnitt 6).

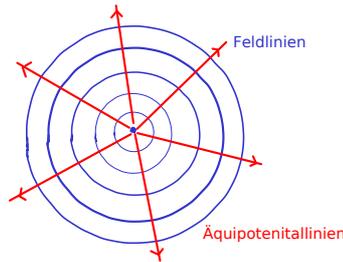


ABBILDUNG 9. Die Feld- und Äquipotentiallinien einer Zirkulationsströmung

Ist γ ein geschlossener Weg, so hat das Kurvenintegral

$$\int_{\gamma} f'(z) dz = \int_{\gamma} w_1(x, y) dx + w_2(x, y) dy + i \cdot \int_{\gamma} w_1(x, y) dy - w_2(x, y) dx$$

eine physikalische Interpretation.¹ Der Realteil

$$\Gamma := \operatorname{Re} \left(\int_{\gamma} f'(z) dz \right) = \int_{\gamma} w_1(x, y) dx + w_2(x, y) dy$$

heißt die *Zirkulation* und beschreibt die Strömung entlang der Kurve γ , der Imaginärteil

$$\Phi := \operatorname{Im} \left(\int_{\gamma} f'(z) dz \right) = \int_{\gamma} w_1(x, y) dy - w_2(x, y) dx$$

¹Die Integrale auf der rechten Seite sind reelle Kurvenintegrale und ergeben sich aus Gleichung (2).

heißt der und beschreibt den *Fluß* senkrecht durch die Kurve γ . Entlang einer Stromlinie $\{\mathbf{v} = \text{konst.}\}$ verläuft die Strömung tangential, was darin Ausdruck findet, daß der Fluß 0 ist:

$$\begin{aligned}\Phi &= \text{Im} \left(\int_{\gamma} f'(z) \, dz \right) = \int_a^b \text{Im}(f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)) \, dz \\ &= \int_0^1 \frac{\partial v}{\partial x}(\gamma(t)) \cdot \text{Re}(\gamma'(t)) + \frac{\partial v}{\partial y}(\gamma(t)) \cdot \text{Im}(\gamma'(t)) \, dt = \int_0^1 0 \, dt = 0,\end{aligned}$$

weil $\gamma'(t)$ der Tangentialvektor an die Kurve $\gamma([0, 1]) = \{\mathbf{v} = \text{konst.}\}$ in $\gamma(t)$ ist und $\nabla v(\gamma(t))$ der Normalenvektor der Kurve dort ist.

Schauen wir uns das im Beispiel obiger *Zirkulationsströmung* an, erhalten wir entlang der Stromlinie $K_r(0)$ als Zirkulation

$$\Gamma = \Gamma + i \cdot \Phi = \int_{K_r(0)} \frac{ik}{z} \, dz = -2\pi k.$$

Bemerkung 4.17 (Kurvenintegrale und Auftriebskraft)

Ähnlich wie in Bemerkung 4.16 betrachten wir eine Strömung mit Zirkulation, diesmal um einen Kreis vom Radius 1 mit Mittelpunkt im Ursprung. Man kann sich überlegen, daß man in diesem Fall als komplexes Potential die Funktion

$$f(z) = v_0 \cdot \left(z + \frac{1}{z} \right) + ik \ln(z)$$

mit einer geeigneten Geschwindigkeitskonstanten v_0 und einer geeigneten Zirkulationskonstanten k erhält.

Wenn ρ die Dichte der strömenden Flüssigkeit beschreibt, dann erhalten wir aus der Auftriebsformel von Blasius die Auftriebskraft F für eine Stromlinie C als

$$F = -\frac{i\rho}{2} \cdot \int_C \overline{(f'(z))^2} \, dz.$$

Für das obige komplexe Potential f erhalten wir

$$f'(z) = v_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{z^2} \right) + \frac{ik}{z}$$

und somit

$$(f'(z))^2 = \left(v_0^2 - \frac{2v_0^2 + k^2}{z^2} + \frac{v_0^2}{z^4} \right) + i \cdot \left(\frac{2v_0k}{z} - \frac{2v_0k}{z^3} \right).$$

Beachten wir nun, daß das Integral von Funktionen der Form $\frac{1}{z^n}$ über geschlossenen Wegen für $n \neq -1$ den Wert 0 hat, so sehen wir, daß nur der Anteil

$$\frac{i2v_0k}{z}$$

zur Auftriebskraft F beiträgt und wir erhalten

$$F = -\frac{i\rho}{2} \cdot \int_C \frac{i2v_0k}{z} \, dz = -\frac{i\rho}{2} \cdot \overline{i2v_0k \cdot 2\pi i} = 2v_0k\rho\pi i.$$

Beachten wir nun noch, daß aus denselben Gründen die Zirkulation

$$\Gamma = \operatorname{Re} \int_{\mathcal{C}} f'(z) \, dz = \operatorname{Re} \int_{\mathcal{C}} \frac{ik}{z} = -2\pi k$$

gilt, so erhalten wir die *Auftriebsformel von Kutta-Joukowski*

$$F = -i\rho v_0 \Gamma,$$

die u.a. besagt, daß es ohne Zirkulation keinen Auftrieb gibt. Interessant ist dies etwa bei der Konstruktion der Tragflächen von Flugzeugen. Dabei kommt dann auch die konforme Joukowski-Abbildung

$$h : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \frac{1}{2} \cdot \left(z + \frac{1}{z} \right).$$

aus den Übungen zum Einsatz, die als Koordinatentransformation den Kreis

$$K_{\frac{13}{10}} \left(-\frac{1}{5} + i \cdot \frac{1}{2} \right)$$

auf eine Kurve abbilden kann, die an den Querschnitt der Tragfläche eines Flugzeugs erinnert (siehe Abbildung 10).

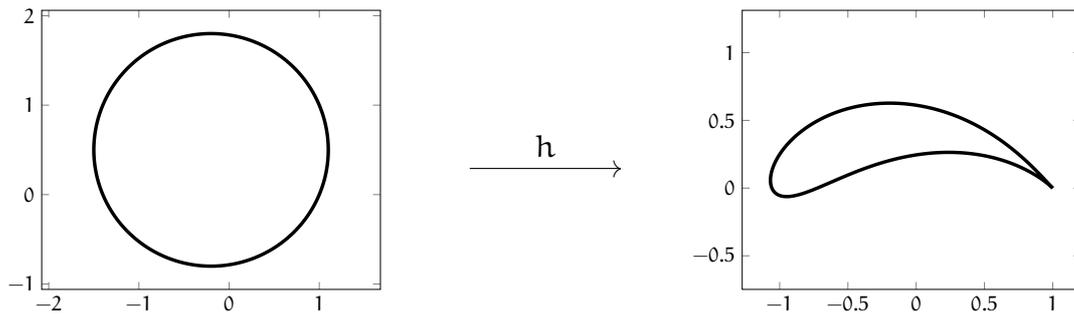


ABBILDUNG 10. Transformation eines Kreises mittels der Joukowski-Abbildung

Aufgaben

Aufgabe 4.18

Berechne das Kurvenintegral $\int_{\Gamma} f(z) \, dz$ für folgende Kurven und Funktionen:

- $f(z) = \bar{z}$ und Γ der Kreisbogen von -1 bis i auf dem Einheitskreis.
- $f(z) = \bar{z}$ und Γ die Strecke von -1 bis i .
- $f(z) = \operatorname{Re}(z)$ und Γ wie in b.
- $f(z) = \operatorname{Re}(z)$ und Γ die Summe der Strecken von -1 bis 0 und von 0 bis i .
- $f(z) = e^{\pi z}$ und Γ wie in a.
- $f(z) = e^{\pi z}$ und Γ wie in b.

- g. $f(z) = z^2$ und Γ die Summe aus dem Kreisbogen von 1 bis i auf dem Einheitskreis und der Strecke von i bis $-1 + i$.

Aufgabe 4.19

Berechne für $f(z) = \operatorname{Re}(z)$ und für $f(z) = \frac{1}{z^3}$ das Kurvenintegral $\int_{\Gamma} f(z) \, dz$ entlang des Streckenzugs Γ von -1 über $-i$ nach 1 .

§ 5 Die Cauchysche Integralformel und Potenzreihenentwicklung

Die Cauchysche Integralformel ist das wesentlichste Ergebnis dieser Vorlesung. Sie besagt, daß der Wert einer holomorphen Funktion in einem Punkt z als eine Art Mittelwert der Funktionswerte entlang eines geeigneten Weges um den Punkt z herum berechnet werden kann. Dabei wird der Mittelwert mit Hilfe eines Kurvenintegrals gebildet. Alle anderen zentralen Ergebnisse der Vorlesung, so zum Beispiel die Potenzreihenentwicklung holomorpher Funktionen, leiten sich direkt oder indirekt aus dem Cauchyschen Integralsatz ab (siehe auch Abschnitt 12).

A) Die Cauchysche Integralformel

Notation 5.1 (Kreisränder)

Wir werden im folgenden oft über geschlossene Kurven integrieren, die als Lösungsmenge einfacher Gleichungen auftauchen, wie etwa der Rand eines Kreises

$$\partial K_r(\mathbf{a}) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \mathbf{a}| = r\}.$$

Wir haben in Lemma 4.2 bereits gesehen, daß Kurvenintegrale nur von der Kurve und deren Orientierung, d.h. der Richtung, in der sie durchlaufen wird, abhängt, nicht aber von der konkreten Parametrisierung. Wir wollen uns bei allen Kurven, bei denen dies einen Sinn ergibt, darauf verständigen, daß sie gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen werden, und wir verwenden die suggestive Schreibweise

$$\int_{|z-\mathbf{a}|=r} f(z) dz := \int_{\partial K_r(\mathbf{a})} f(z) dz,$$

bei der die definierende Gleichung statt der Kurve angegeben wird, weil dies auch in der Literatur so üblich ist.

Beispiel 5.2 (Integralformel)

Wir betrachten die holomorphe Funktion

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto z^2.$$

Für einen Punkt \mathbf{a} im Inneren des Kreises $K_r(0) = \{z \mid |z| = r\}$ gilt dann

$$\begin{aligned} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z - \mathbf{a}} dz &= \int_{|z|=r} \frac{z^2}{z - \mathbf{a}} dz \\ &= \int_{|z|=r} \frac{z^2 - \mathbf{a}^2}{z - \mathbf{a}} dz + \int_{|z|=r} \frac{\mathbf{a}^2}{z - \mathbf{a}} dz \\ &= \int_{|z|=r} z + \mathbf{a} dz + \mathbf{a}^2 \cdot \int_{|z|=r} \frac{1}{z - \mathbf{a}} dz \\ &= 0 + \mathbf{a}^2 \cdot 2\pi i = 2\pi i \cdot f(\mathbf{a}), \end{aligned}$$

wobei wir beim vorletzten Gleichheitszeichen einerseits den Cauchyschen Integralsatz verwenden, um zu sehen, daß das erste Integral 0 ist, und andererseits Beispiel 4.15 ausnutzen, um den Wert des zweiten Integrals zu bestimmen.

Man beachte, daß der Wert des Integrals nicht vom gewählten Radius r abhängt, sondern allein vom Wert der Funktion am Punkt \mathbf{a} . Alternativ sieht man damit auch, daß der Wert der Funktion an einem beliebigen Punkt im Inneren des Kreises $K_r(\mathbf{0})$ allein von den Werten der Funktion auf dem Rand des Kreises abhängt! Das ist ein allgemeines Phänomen, wie der folgende Satz besagt.

Satz 5.3 (Cauchysche Integralformel)

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, das die Kreisscheibe $\overline{K_r(z_0)}$ enthält, und sei $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt für $\mathbf{a} \in K_r(z_0)$

$$f(\mathbf{a}) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-\mathbf{a}} dz.$$

Insbesondere sind die Funktionswerte von f auf der Kreisscheibe $\overline{K_r(z_0)}$ schon durch ihre Funktionswerte auf dem Rand der Kreisscheibe festgelegt!

Beweisidee: Wir wählen ein $\varepsilon > 0$, so daß die Kreisscheibe um \mathbf{a} mit Radius ε ganz in $K_r(z_0)$ liegt (siehe Abbildung 11). Dann sind die Ränder der Kreise $K_r(z_0)$

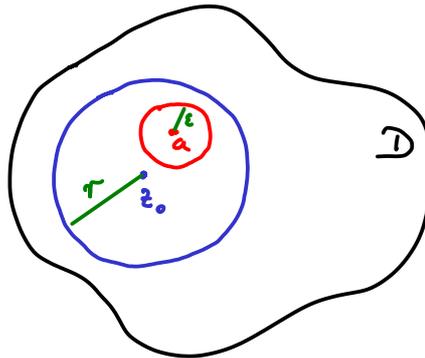


ABBILDUNG 11. Beweis der Cauchyschen Integralformel

und $K_\varepsilon(\mathbf{a})$ homotop in $G \setminus \{\mathbf{a}\}$ und die Funktion

$$G \setminus \{\mathbf{a}\} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \frac{f(z)}{z-\mathbf{a}}$$

ist holomorph auf $G \setminus \{\mathbf{a}\}$. Wegen Bemerkung 4.14 erhalten wir also

$$\begin{aligned} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-\mathbf{a}} dz &= \int_{|z-\mathbf{a}|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-\mathbf{a}} dz \\ &= \int_{|z-\mathbf{a}|=\varepsilon} \frac{f(z)-f(\mathbf{a})}{z-\mathbf{a}} dz + \int_{|z-\mathbf{a}|=\varepsilon} \frac{f(\mathbf{a})}{z-\mathbf{a}} dz \\ &= \int_{|z-\mathbf{a}|=\varepsilon} \frac{f(z)-f(\mathbf{a})}{z-\mathbf{a}} dz + 2\pi i \cdot f(\mathbf{a}). \end{aligned}$$

Für $\varepsilon \rightarrow 0$ ist der Integrand des letzten Integral aber beschränkt, da f in \mathbf{a} holomorph ist, und die Länge des Integrationsweges geht gegen 0. Somit folgt aus der

Abschätzung des Wegintegrals in Lemma 4.4, daß der Summand gegen 0 konvergiert. □

Beispiel 5.4

Wir betrachten die Menge

$$E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| + |z + i| = 4\}.$$

Dies ist die Menge aller Punkte in der komplexen Ebene, für die die Summe der Abstände von i und $-i$ konstant den Wert 4. Aus elementargeometrischen Überlegungen wissen wir, daß es sich dabei um eine Ellipse mit den Brennpunkten i und $-i$ handelt. Diese ist zweifellos die Spur eines \mathcal{C}^1 -Weges, der in der punktierten

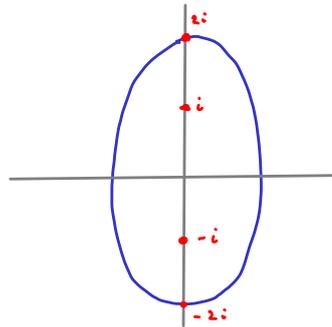


ABBILDUNG 12. Beweis der Cauchyschen Integralformel

Ebene $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ homotop zum Einheitskreis $\partial K_1(0)$ ist. Wegen Bemerkung 4.14 und dem Cauchyschen Integralsatz erhalten wir deshalb

$$\int_{|z-i|+|z+i|=4} \frac{\cos(z)}{z} dz = \int_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{z} dz = 2\pi i \cdot \cos(0) = 2\pi i.$$

Beispiel 5.5

Wir wollen das Kurvenintegral

$$\int_{|z-1|=3} \frac{z^2 \cdot \cos(z)}{z^3 - \pi z^2 - 25z + 25\pi} dz$$

berechnen. Wegen

$$z^3 - \pi z^2 - 25z + 25\pi = (z + 5) \cdot (z - 5) \cdot (z - \pi)$$

ist die Funktion

$$f(z) = (z - \pi) \cdot \frac{z^2 \cdot \cos(z)}{z^3 - \pi z^2 - 25z + 25\pi} = \frac{z^2 \cdot \cos(z)}{z^2 - 25}$$

außerhalb der Menge

$$\{-5, 5\}$$

holomorph. Wählen wir eine kleine offene Umgebung der Kreisscheibe $\overline{K_3(1)}$ als G , etwa

$$G = K_{\frac{7}{2}}(1),$$

so ist die Funktion f auf G holomorph und aus der Cauchyschen Integralformel erhalten wir

$$\int_{|z-1|=3} \frac{z^2 \cdot \cos(z)}{z^3 - \pi z^2 - 25z + 25\pi} dz = \int_{|z-1|=3} \frac{f(z)}{z - \pi} = 2\pi i \cdot f(\pi) = \frac{-2\pi^3 i}{\pi^2 - 25}.$$

B) Potenzreihenentwicklung holomorpher Funktionen

Korollar 5.6 (Potenzreihenentwicklungssatz)

Ist $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ auf der offenen Menge D holomorph, so ist f auf D unendlich oft komplex differenzierbar und f stimmt für jedes $z_0 \in D$ mit seiner komplexen Taylorreihe mit Entwicklungspunkt z_0 auf dem Konvergenzbereich der Taylorreihe in D überein, wobei der Konvergenzradius der Taylorreihe

$$r = \sup\{\rho \in \mathbb{R}_{>0} \mid K_\rho(z_0) \subseteq D\}$$

der maximale Radius eines Kreises um z_0 ist, der ganz in D liegt. Für $z \in K_r(z_0)$ gilt also

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n$$

mit

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=\rho} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \quad (3)$$

für jedes $0 < \rho < r$ und die Konvergenz der Reihe ist auf $\overline{K_\rho(z_0)}$ zudem gleichmäßig. Hier bezeichnet $f^{(n)}$ die n -te komplexe Ableitung von f .

Beweisidee: Wir beachten, daß

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}}.$$

Für $|z-z_0| < |w-z_0|$ erhalten wir aus der geometrischen Reihe

$$\frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0} \right)^n.$$

Damit erhalten wir aus der Cauchyschen Integralformel für ein z mit $|z-z_0| < \rho$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{|w-z_0|=\rho} \frac{f(w)}{w-z} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{|w-z_0|=\rho} \frac{f(w)}{w-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{|w-z_0|=\rho} \frac{f(w)}{w-z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0} \right)^n dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{|w-z_0|=\rho} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \right) \cdot (z-z_0)^n. \end{aligned}$$

Man beachte, daß das Vertauschen des Integrals und der Reihe wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe möglich ist. Gliedweises Differenzieren der Potenzreihe liefert dann (3) und zeigt, daß die Potenzreihe wirklich die Taylorreihe ist. Die Gleichmäßigkeit der Konvergenz der Taylorreihe auf $\overline{K_\rho(z_0)}$ folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz der geometrischen Reihe auf dem Bereich. Zudem ist f als Potenzreihe in z_0 unendlich oft differenzierbar. \square

Beispiel 5.7

a. Den Cosinus haben wir durch seine Taylorreihe

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

im Entwicklungspunkt 0 definiert. Wir erhalten daraus

$$\int_{|z|=\rho} \frac{\cos(z)}{z^{2n}} dz = 0$$

und

$$\int_{|z|=\rho} \frac{\cos(z)}{z^{2n+1}} dz = \frac{(-1)^n \cdot 2\pi i}{(2n)!}.$$

b. Die Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \frac{1}{z}$$

ist holomorph und

$$K_1(z_0) \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

ist die größte Kreisscheibe um

$$z_0 = i,$$

die ganz im Gebiet $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ enthalten ist. Mithin läßt sich f auf dieser Kreisscheibe in eine Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z - i)^n$$

entwickeln mit

$$a_n = \frac{f^{(n)}(i)}{n!}.$$

Mit Induktion nach n berechnet man leicht

$$f^{(n)}(z) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{z^{n+1}},$$

und damit ergibt sich

$$a_n = \frac{(-1)^n}{i^{n+1}} = \begin{cases} \frac{1}{i} = -i, & \text{falls } n \equiv 0 \pmod{4}, \\ \frac{-1}{-1} = 1, & \text{falls } n \equiv 1 \pmod{4}, \\ \frac{1}{-i} = i, & \text{falls } n \equiv 2 \pmod{4}, \\ \frac{-1}{1} = -1, & \text{falls } n \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Wir erhalten also

$$\frac{1}{z} = f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{i^{n+1}} \cdot (z - i)^n$$

als Potenzenreihendarstellung auf der Kreisscheibe $K_1(i)$.

Aufgaben

Aufgabe 5.8

Berechne die folgenden Kurvenintegrale:

a. $\int_{|z-2|=1} \frac{z^3+2z^2+5}{z^3+4z} dz,$

b. $\int_{|z|=1} \frac{z^3+2z^2+5}{z^3+4z} dz,$

c. $\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=3} \frac{e^{z-\frac{\pi}{2}}}{z^2+1} dz.$

Aufgabe 5.9

Berechne das Kurvenintegral

$$\int_{\Gamma} \frac{e^z}{z - \pi i} dz$$

entlang der Kurve

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 3| + |z + 3| = 10\}.$$

Aufgabe 5.10

Berechne die folgenden Kurvenintegrale:

a. $\int_{|z|=1} \frac{\sin(z)+z \cdot e^z}{z - \frac{\pi}{2}} dz.$

b. $\int_{|z|=\pi} \frac{\sin(z)}{z - \frac{\pi}{2}} dz.$

c. $\int_{|z-1|=1} \frac{z^2 \cdot e^z}{z^3 - z^2 + z - 1} dz.$

d. $\int_{|z+1|+|z-3|=6} \frac{\cos(z) \cdot e^{iz}}{(z - \frac{\pi}{2})^3} dz.$

Aufgabe 5.11

Wählt man einen Zweig der Wurzelfunktion, so definiert die Funktionsvorschrift $f(z) = \ln \sqrt{1+z^2}$ lokal in $z_0 = 0$ eine holomorphe Funktion. Berechne die Potenzreihenentwicklung der Funktion im Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ und bestimme deren Konvergenzradius.

§ 6 Isolierte Singularitäten und Laurententwicklung

In diesem Abschnitt wollen wir isolierte Definitionslücken holomorpher Funktionen untersuchen und ihrem Komplexitätsgrad entsprechend klassifizieren. Wir werden sehen, daß sich holomorphe Funktionen auf einer punktierten Kreisscheibe um diese Definitionslücken in verallgemeinerte Potenzreihen entwickeln lassen.

A) Klassifikation isolierter Singularitäten

Definition 6.1 (Isolierte Singularitäten)

Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $z_0 \in D$.

- z_0 heißt *isolierte Singularität* von $f : D \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$, wenn f holomorph ist.
- Eine isolierte Singularität z_0 von f heißt *hebbar*, wenn f eine holomorphe Fortsetzung nach D besitzt.
- Eine isolierte Singularität z_0 von f heißt ein *Pol* oder eine *Polstelle*, wenn z_0 nicht hebbar ist und es ein $m \geq 1$ gibt, so daß

$$D \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto (z - z_0)^m \cdot f(z)$$

in z_0 eine hebbare Singularität hat. Die kleinste solche Zahl m heißt die *Polordnung* von z_0 .

- Eine isolierte Singularität z_0 von f heißt *wesentlich*, wenn sie weder hebbar noch ein Pol ist.

Beispiel 6.2

- Die Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \frac{\sin(z)}{z}$$

hat in 0 eine hebbare Singularität, da die Potenzreihe

$$\frac{\sin(z)}{z} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}$$

eine holomorphe Fortsetzung von f auf \mathbb{C} definiert.

- Aus der Analysis ist bekannt, daß

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^m} = \infty$$

für jedes natürliche Zahl m , da die Exponentialfunktion schneller wächst als jede Polynomfunktion. Damit gilt dann aber auch, daß

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^m \cdot e^{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x^m}} = \infty,$$

und die holomorphe Funktion

$$\mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto z^m \cdot e^{\frac{1}{z}}$$

kann für kein m auch nur eine stetige Fortsetzung nach \mathbb{C} besitzen, also erst recht keine holomorphe. Damit hat die Funktion

$$\mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto e^{\frac{1}{z}}$$

in $z_0 = 0$ also eine wesentliche Singularität.

c. Die Funktion

$$\ln : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \ln(z)$$

besitzt in 0 keine isolierte Singularität, weil der Definitionsbereich kein in 0 punktiertes Gebiet ist und \ln sich auch nicht auf ein solches holomorph fortsetzen läßt.

Definition 6.3

$z_0 \in D$ heißt *Nullstelle* der *Ordnung*

$$\text{ord}_{z_0}(f) = m$$

der holomorphen Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, wenn

$$f(z_0) = f'(z_0) = f^{(2)}(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0 \neq f^{(m)}(z_0).$$

Beispiel 6.4

Die Funktion

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto z^3 - 2z^2 + z = z \cdot (z - 1)^2$$

hat in $z_0 = 0$ eine Nullstelle der Ordnung 1 und in $z_0 = 1$ eine Nullstelle der Ordnung 2, weil mit

$$f'(z) = 3z^2 - 4z + 1 \quad \text{und} \quad f''(z) = 6z - 4$$

auch

$$f(0) = 0 \neq 1 = f'(0)$$

gilt sowie

$$f(1) = f'(1) = 0 \neq 2 = f''(1).$$

Proposition 6.5 (Nullstellen und Polstellen)

Es sei $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion.

a. Genau dann hat f in z_0 eine Nullstelle der Ordnung m , wenn die Taylorreihe in z_0 die Form

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n = (z - z_0)^m \cdot g(z)$$

hat mit $a_m \neq 0$ und $g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $g(z_0) \neq 0$.

b. Ist z_0 eine Nullstelle der Ordnung m von f , dann hat die Funktion

$$h : D \setminus \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \frac{f(z)}{(z - z_0)^k}$$

eine hebbare Singularität in z_0 für alle $0 \leq k \leq m$.

c. Ist $f(z_0) \neq 0$ und ist $m \geq 1$, so hat die Funktion

$$h : D \setminus \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \frac{f(z)}{(z - z_0)^m}$$

in z_0 einen Pol der Ordnung m .

Beweis: Da die Taylorreihe von f in z_0 die Koeffizienten

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

hat, folgt a. aus der Definition einer Nullstelle der Ordnung m , und dabei ist g lokal in z_0 durch die Potenzreihe

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{m+n} \cdot (z - z_0)^n$$

definiert. Die Funktion

$$z \mapsto (z - z_0)^{m-k} \cdot g(z)$$

ist lokal in z_0 eine holomorphe Fortsetzung der Funktion h in Teil b., so daß diese eine hebbare Singularität in z_0 besitzt. Teil c. folgt unmittelbar aus der Definition einer Polstelle. \square

Beispiel 6.6

- a. Mit Proposition 6.5 a. sieht man ohne Berechnung der Ableitungen sofort, daß die Funktion in Beispiel 6.4 in $z_0 = 0$ eine Nullstelle der Ordnung 1 und in $z_0 = 1$ eine Nullstelle der Ordnung 2 hat.
- b. Wegen Proposition 6.5 c. hat die Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \frac{1}{z^2}$$

einen Pol der Ordnung 2 in $z_0 = 0$.

- c. Der Cosinus hat in $\frac{\pi}{2}$ eine Nullstelle der Ordnung 1, weil

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \neq -1 = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos'\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Dann läßt sich der Cosinus nach Proposition 6.5 a. also als

$$\cos(z) = \left(z - \frac{\pi}{2}\right) \cdot g(z)$$

mit einer ganzen Funktion $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $g\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq 0$ schreiben. Dann hat die Funktion

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \cos^2(z) = \left(z - \frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot g^2(z)$$

hat in $z_0 = \frac{\pi}{2}$ aber eine Nullstelle der Ordnung 2, weil $g^2(z) \neq 0$. Das hätte man natürlich auch leicht aus der Definition direkt ableiten können, weil

$$f'(z) = -2 \cdot \sin(z) \cdot \cos(z) \quad \text{und} \quad f''(z) = -2 \cdot \cos^2(z) + 2 \cdot \sin^2(z)$$

und damit

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \neq 2 = f''\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Aus Proposition 6.5 b. erhalten wir damit, daß die Funktion

$$h : \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \frac{\cos^2(z)}{z - \frac{\pi}{2}}$$

in $z_0 = \frac{\pi}{2}$ eine hebbare Singularität besitzt.

B) Laurententwicklung

Definition 6.7

Für $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r, R \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $0 \leq r < R$ nennen wir die offene Menge

$$\mathcal{R}_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\} = K_R(z_0) \setminus \overline{K_r(z_0)}$$

den *Kreisring* um z_0 mit den Radien r und R (siehe Abbildung 13).

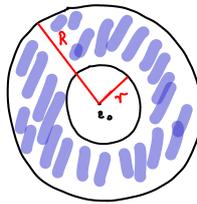


ABBILDUNG 13. Der Kreisring $\mathcal{R}_{r,R}(z_0)$

Beispiel 6.8

- $\mathcal{R}_{1,2}(0)$ ist die offene Kreisscheibe vom Radius 2 um den Ursprung ohne die abgeschlossene Kreisscheibe vom Radius 1 um den Ursprung.
- $\mathcal{R}_{0,1}(0) = K_1(0) \setminus \{0\}$ ist die punktierte Einheitskreisscheibe ohne den Ursprung.
- $\mathcal{R}_{1,\infty}(0) = \mathbb{C} \setminus \overline{K_1(0)}$ ist die komplexe Zahlenebene ohne den abgeschlossenen Einheitskreis.
- $\mathcal{R}_{0,\infty}(0) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist die punktierte Ebene.

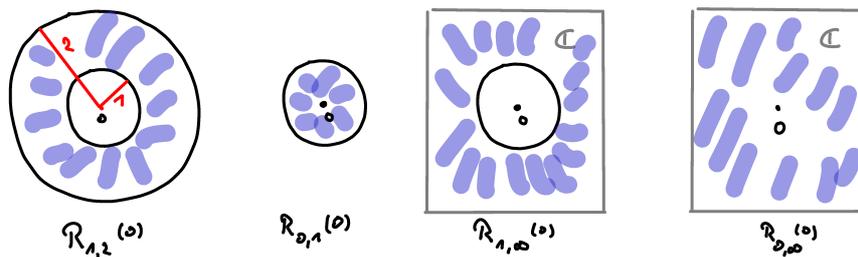


ABBILDUNG 14. Die Kreisringe $\mathcal{R}_{1,2}(0)$, $\mathcal{R}_{0,1}(0)$, $\mathcal{R}_{1,\infty}(0)$ und $\mathcal{R}_{0,\infty}(0)$

Satz 6.9 (Laurententwicklung)

Jede auf dem Kreisring $\mathcal{R}_{r,R}(z_0)$ holomorphe Funktion $f : \mathcal{R}_{r,R}(z_0) \longrightarrow \mathbb{C}$ läßt sich dort eine Laurentreihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n$$

entwickeln mit

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

für $r < \rho < R$ beliebig. Die für $|z-z_0| > r$ konvergente Potenzreihe

$$f^-(z) = \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n \cdot (z-z_0)^n$$

heißt der Hauptteil der Laurentreihe und die für $|z-z_0| < R$ konvergente Potenzreihe

$$f^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z-z_0)^n$$

heißt der Nebenteil der Laurentreihe. Die Zerlegung

$$f = f^- + f^+$$

heißt die Laurentzerlegung von f und die Koeffizienten der Laurentreihe hängen nur von f und dem Kreisring ab.

Beweisidee: Wir betrachten zunächst die beiden Kreisränder $|z-z_0| = R-\varepsilon$ und $|z-z_0| = r+\varepsilon$ für eine sehr kleines ε . Durchläuft ein Weg ω zunächst den äußeren Kreisränder gegen den Uhrzeigersinn, geht dann auf geradem Weg zum inneren Kreisrand, durchläuft diesen im Uhrzeigersinn und geht auf dem selben geraden Weg wieder nach außen, so erhalten wir einen Weg im Kreisring, der homotop zum Weg γ entlang des Randes eines kleinen Kreises um einen beliebigen Punkt z mit $r+\varepsilon < |z-z_0| < R-\varepsilon$ ist (siehe Abbildung 15).

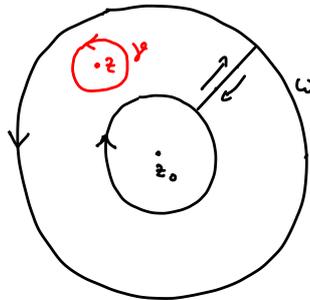


ABBILDUNG 15. Laurentreihenentwicklung: ω ist homotop zu γ

Aus der Homotopieinvarianz des Integrals 4.14, der Cauchyschen Integralformel 5.3 und weil die Kurvenintegrale entlang der beiden geraden Stücke sich herausheben, erhalten wir

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega} \frac{f(w)}{w-z} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=R-\varepsilon} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r+\varepsilon} \frac{f(w)}{w-z} dw. \end{aligned}$$

Man entwickelt dann

$$f^+(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=R-\varepsilon} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

und

$$f^-(z) := -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r+\varepsilon} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

in Potenzreihen wie im Beweis des Potenzreihenentwicklungssatzes 5.6, wobei man für den Hauptteil den Integranden als

$$\frac{f(w)}{w-z} = \frac{-f(w)}{z-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{w-z_0}{z-z_0}}$$

umschreibt und dann wegen $|w-z_0| = r + \varepsilon < |z-z_0|$ die geometrische Reihe einsetzen kann. \square

Beispiel 6.10

Die Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \frac{1}{z \cdot (z-1)}$$

ist auf dem Kreisring $\mathbb{R}_{0,1}(0)$ holomorph und besitzt dort die Laurententwicklung

$$f(z) = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=-1}^{\infty} -z^n.$$

Der Hauptteil auf $\mathbb{R}_{0,1}(0)$ ist also

$$f^-(z) = \frac{-1}{z}$$

und der Nebenteil ist

$$f^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} -z^n = -\frac{1}{1-z}.$$

Man sieht leicht, daß in der Tat gilt

$$f^-(z) + f^+(z) = -\frac{1}{z} - \frac{1}{1-z} = -\frac{1-z}{z \cdot (1-z)} - \frac{z}{z \cdot (1-z)} = f(z).$$

Die Funktion f ist aber auch auf dem Kreisring $\mathbb{R}_{1,\infty}(0)$ holomorph. Für $|z| > 1$

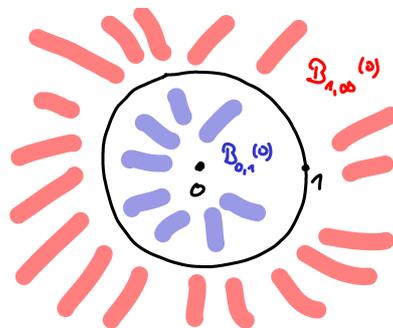


ABBILDUNG 16. Die Definitionsbereiche der beiden Laurentreihen zu f

kann man aber $\frac{1}{1-z}$ nicht mehr mittels der geometrischen Reihe in eine Potenzreihe

entwickeln, dafür geht dies nun für den Term $\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$. Wir erhalten auf $R_{1,\infty}(0)$ auf dem Weg die Laurententwicklung

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=-2}^{-\infty} z^n$$

mit Hauptteil

$$f^-(z) = f(z) = \sum_{n=-2}^{-\infty} z^n$$

und Nebenteil

$$f^+(z) = 0.$$

Wir sehen also, daß die Laurententwicklung von f nicht nur vom Entwicklungspunkt abhängt, sondern ganz wesentlich auch von den gewählten Radien des Kreisringes.

Beispiel 6.11

Wir wollen die holomorphe Funktion

$$f: \mathbb{C} \setminus \{1\} \mapsto \mathbb{C}: z \mapsto \frac{(z+1) \cdot e^{z-1}}{(z-1)^2}$$

um $z_0 = 1$ in eine Laurentreihe entwickeln. Dazu entwickeln wir zunächst die einzelnen Faktoren in Laurentreihen, wobei wir für die Exponentialfunktion auf ihre Potenzreihenentwicklung zurück greifen:

$$e^{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot (z-1)^n.$$

Für den Faktor $z+1$ erhalten wir

$$z+1 = (z-1) + 2,$$

woraus sich für den Nenner von $f(z)$ die Formel

$$\begin{aligned} (z+1) \cdot e^{z-1} &= (z-1) \cdot e^{z-1} + 2 \cdot e^{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot (z-1)^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n!} \cdot (z-1)^n \\ &= 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n-1)!} + \frac{2}{n!} \right) \cdot (z-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n!} \cdot (z-1)^n \end{aligned}$$

ergibt. Kombinieren wir dies noch mit dem Nenner, so erhalten wir die Laurentreihenentwicklung

$$f(z) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n!} \cdot (z-1)^n}{(z-1)^2} = \sum_{n=-2}^{\infty} \frac{n+4}{(n+2)!} \cdot (z-1)^n,$$

die auf dem Kreisring $B_{0,\infty}(1) = \mathbb{C} \setminus \{1\}$ definiert ist.

Korollar 6.12 (Laurententwicklung um eine isolierte Singularität)

Eine holomorphe Funktion $f : D \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ habe in z_0 eine isolierte Singularität und auf dem Kreisring $R_{0,R}(z_0) = K_R(z_0) \setminus \{z_0\} \subseteq D \setminus \{z_0\}$ die Laurententwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n.$$

Dann gilt:

- Genau dann ist z_0 hebbar, wenn $a_n = 0$ für alle $n < 0$.
- Genau dann ist z_0 Pol der Ordnung m , wenn $a_n = 0$ für $n < -m$ und $a_{-m} \neq 0$.
- Genau dann ist z_0 wesentlich, wenn $a_n \neq 0$ für unendlich viele $n < 0$.

Beispiel 6.13 a. Die Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto e^{\frac{1}{z}}$$

aus Beispiel 6.2 hat auf $R_{0,\infty}(0) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ die Laurententwicklung

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{z^n}{z^n} = \sum_{n=-\infty}^0 \frac{z^n}{(-n)!}.$$

Da diese unendlich viele Summanden mit negativem Exponenten besitzt, muß f nach Korollar 6.12 in $z_0 = 0$ eine wesentliche Singularität haben. Dies bestätigt unsere Überlegungen aus Beispiel 6.2.

- Die Funktion aus Beispiel 6.11 hat in $z_0 = 1$ einen Pol der Ordnung 2, wie man aus der Laurentreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-2}^{\infty} \frac{n+4}{(n+2)!} \cdot (z-1)^n$$

ablesen kann.

Bemerkung 6.14 (Stammfunktionen von Laurentreihen)

Da die Konvergenz einer Laurentreihen

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n$$

auf jedem abgeschlossenen Kreisring $\overline{R_{r+\varepsilon, R-\varepsilon}(z_0)}$ in ihrem Definitionsbereich gleichmäßig ist, können wir Integration und Reihenbildung vertauschen und erhalten unmittelbar, daß die Funktion f auf $R_{r,R}(z_0)$ genau dann eine Stammfunktion besitzt, wenn

$$a_{-1} = 0$$

gilt, wobei a_{-1} der Koeffizient der Laurententwicklung vor $z^{-1} = \frac{1}{z}$ ist. Die Stammfunktion erhalten wir durch gliedweises Integrieren der Laurentreihe.

Beispiel 6.15

Die Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \frac{1}{z \cdot (z - 1)}$$

aus Beispiel 6.10 hat auf $K_1(0)$ die Laurententwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} -z^n = \frac{-1}{z} - 1 - z - z^2 - \dots$$

mit

$$a_{-1} = -1.$$

Auf diesem Kreisring besitzt f mithin keine Stammfunktion.

Auf dem Kreisring $R_{1,\infty}(0)$ ist die Laurententwicklung hingegen

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-2} z^n = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \dots$$

und mithin

$$a_{-1} = 0.$$

Auf $R_{1,\infty}(0)$ hat f deshalb die Stammfunktion

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{-2} \frac{z^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{z^n}{n}.$$

Sie beschreibt eine holomorphe Funktion, die ihrerseits auf dem gegebenen Kreisring keine Stammfunktion besitzt.

C) Der Riemannsche Hebbarkeitssatz**Satz 6.16** (Riemannscher Hebbarkeitssatz)

Ist f auf $D \setminus \{z_0\}$ holomorph und beschränkt, so hat f in z_0 eine hebbare Singularität.

Beweisidee: Wie in Korollar 12.1 sieht man

$$|a_n| \leq \frac{M}{\rho^n}$$

für die Koeffizienten der Laurentreihe, wenn $|f(z)| \leq M$ für alle z . Ist $n < 0$ so konvergiert die rechte Seite für $\rho \rightarrow 0$ gegen 0, woraus $a_n = 0$ für $n < 0$ folgt. \square

Bemerkung 6.17

Die Bedeutung des Riemannschen Hebbarkeitssatzes liegt darin, daß aus der stetigen Fortsetzbarkeit einer holomorphen Funktion $f : D \setminus \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ in den Punkt z_0 automatisch schon folgt, daß die Fortsetzung selbst holomorph und damit in z_0 komplex differenzierbar ist!

Eine analoge Aussage für reelle Funktionen gilt nicht. Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

kann durch $f(0) = 0$ stetig nach $z_0 = 0$ fortgesetzt werden, weil der Sinus auf \mathbb{R} beschränkt ist. Die Fortsetzung ist aber nicht differenzierbar in $z_0 = 0$.

Wir sehen daraus insbesondere, daß die Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto z \cdot \sin\left(\frac{1}{z}\right)$$

in $z_0 = 0$ keine hebbare Singularität haben kann. Das liegt daran, daß die Funktion f lokal in 0 nicht beschränkt ist:

$$f(it) = it \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(it)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n+1)!} \geq \frac{t^2}{6} \rightarrow \infty$$

für $t \rightarrow \infty$. Wir wissen aus Korollar 6.12 natürlich auch, daß

$$f(z) = z \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2n}} = \sum_{n=-\infty}^0 \frac{z^{2n}}{(-2n+1)!}$$

die Laurententwicklung von f auf $\mathbb{R}_{0,\infty}(0)$ ist, und daß somit f in $z_0 = 0$ eine wesentliche Singularität besitzt.

D) Der Satz von Casorati-Weierstraß

Satz 6.18

Für eine holomorphe Funktion $f : D \setminus \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- f hat in z_0 eine wesentliche Singularität.
- Für jedes $c \in \mathbb{C}$ gibt es eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $D \setminus \{z_0\}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$, so daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = c.$$

Insbesondere kommen die Funktionswerte in der Nähe einer wesentlichen Singularität also jedem Wert $c \in \mathbb{C}$ beliebig nahe!

Beweisidee: Wenn $c \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl ist, der sich die Funktionswerte von f nicht beliebig nähern, so ist die Funktion

$$g : z \mapsto \frac{1}{f(z) - c}$$

lokal in z_0 holomorph und beschränkt und nach dem Riemannschen Hebbbarkeitssatz ist sie dann in z_0 holomorph fortsetzbar. Die Funktion

$$f(z) = c + \frac{1}{g(z)}$$

ist dann entweder holomorph in z_0 , wenn $g(z_0) \neq 0$, oder sie hat in z_0 einen Pol, wenn $g(z_0) = 0$ gilt, weil sie dann Quotient einer holomorphen Funktion ist.

Wenn sich die Funktionswerte von f jeder komplexen Zahl c lokal in z_0 beliebig annähern, dann existiert der Grenzwert

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)|$$

weder eigentlich noch uneigentlich. Wäre z_0 hebbar, müßte er eigentlich existieren. Wäre z_0 ein Pol der Ordnung m , so wäre

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z - z_0)^m}$$

für eine holomorphe Funktion h und wir würden

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} |h(z)|}{\lim_{z \rightarrow z_0} |z - z_0|^m} = \frac{|h(z_0)|}{0} = \infty$$

erhalten. □

Beispiel 6.19

Betrachten wir die Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto e^{\frac{1}{z}},$$

die in $z_0 = 0$ eine wesentliche Singularität besitzt, und geben wir uns eine beliebige komplexe Zahl

$$c = r \cdot e^{i\alpha} \in \mathbb{C}$$

vor. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir nun

$$z_n := \frac{1}{\ln(r) + i \cdot (\alpha + 2\pi n)}.$$

Offenbar gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$$

und

$$f(z_n) = e^{\ln(r) + i \cdot (\alpha + 2\pi n)} = r \cdot e^{i\alpha} = c$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. In diesem Beispiel gibt es sogar eine Folge, die gegen $z_0 = 0$ konvergiert, so daß die Folge der Funktionswerte die konstante Folge mit vorgegebenem Wert c ist.

E) Charakterisierung isolierter Singularitäten

Aus dem Satz von Casorati-Weierstraß und dem Riemannschen Hebbarkeitssatz ergibt sich unmittelbar die folgende Charakterisierung isolierter Singularitäten.

Korollar 6.20 (Charakterisierung isolierter Singularitäten)

Eine holomorphe Funktion $f : D \setminus \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ habe in z_0 eine isolierte Singularität.

- a. *Genau dann ist z_0 hebbar, wenn f lokal in z_0 beschränkt ist.*
- b. *Genau dann ist z_0 ein Pol, wenn $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$.*
- c. *Genau dann ist z_0 wesentlich, wenn $f(z)$ lokal in z_0 jedem $c \in \mathbb{C}$ beliebig nahe kommt.*

Beispiel 6.21

Wir wollen die Singularitäten der Funktion f mit

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1} \quad (4)$$

untersuchen, das sind genau die komplexen Zahlen z , für die

$$e^z = 1$$

gilt, d.h.

$$z \in \{2\pi i k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Wir wollen für

$$g(z) = e^z - 1$$

nun die Potenzreihenentwicklung

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z - z_k)^n$$

für $z_k = 2\pi i k$ bestimmen. Wegen $g^{(n)}(z) = e^z$ für jedes $n \geq 1$ gilt

$$a_n = \frac{g^{(n)}(z_k)}{n!} = \begin{cases} \frac{e^{2\pi i k} - 1}{0!} = 0, & \text{für } n = 0, \\ \frac{e^{2\pi i k}}{n!} = \frac{1}{n!}, & \text{für } n \geq 1. \end{cases}$$

Damit ist

$$g(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \cdot (z - z_k)^n = (z - z_k) \cdot h_k(z)$$

mit

$$h_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \cdot (z - z_k)^n$$

eine holomorphe Funktion, die z_k als einfache Nullstelle hat. Mit Hilfe von Proposition 6.5 sind wir damit in der Lage zu entscheiden, welche Singularitäten f hat. Dabei müssen wir zwei Fälle unterscheiden.

Ist $k = 0$ und damit $z_k = z_0 = 0$, so ist

$$f(z) = \frac{z}{z \cdot h_0(z)} = \frac{1}{h_0(z)}$$

in $z_0 = 0$ holomorph fortsetzbar durch die rechte Seite und z_0 ist eine hebbare Singularität.

Ist $k \neq 0$ und somit $z_k \neq 0$, so hat

$$f(z) = \frac{z}{(z - z_k) \cdot h_k(z)} = \frac{\frac{z}{h_k(z)}}{z - z_k}$$

in z_k einen Pol der Ordnung 1, weil $\frac{z}{h_k(z)}$ in z_k holomorph ohne Nullstelle ist.

F) Visualisierung komplexer Funktionen

Bemerkung 6.22 (Kolorierte Phasendiagramme)

Um den Graphen einer komplexen Funktion zu zeichnen, bräuchte man vier Dimensionen, die uns so nicht zur Verfügung stehen. Will man sich das Verhalten von komplexen Funktionen dennoch auf graphischem Wege zugänglich machen, so haben sich kolorierte Phasendiagramme als vielversprechende Möglichkeit etabliert.

Dabei betrachtet man einen Ausschnitt D aus der komplexen Zahlenebene in kartesischen Koordinaten als Definitionsbereich der komplexen Funktion f und färbt jeden Punkt z in diesem aufgrund des Wertes, den die Funktion f an der Stelle z in Polarkoordinaten betrachtet annimmt. Die Farbe im Spektrum von rot bis violett entspricht dabei dem Argument $\arg(f(z))$ im Intervall $[0, 2\pi)$ und die Helligkeit der Farbe entspricht der Größe des Betrages $|f(z)|$ in $[0, \infty)$. Dabei soll weiß als ganz hell für $|f(z)| = \infty$ und schwarz als ganz dunkel für $|f(z)| = 0$ stehen.

Wir schauen uns dies in Abbildung 17 in einigen Beispielen an, wobei wir als Definitionsbereich jeweils ein Quadrat um den Ursprung wählen.

Betrachtet man die erste Reihe in Abbildung 17, so sieht man daran, wie oft sich die Farben beim Umlauf des Ursprungs wiederholen, wie viele Urbilder ein fester Bildpunkt hat; denn haben zwei Punkte dieselbe Farbe, so sind sie Urbilder desselben Wertes von f . Man kann auf dem Weg die Blätter der Wurzelfunktion sehr schön unterscheiden und somit auch die Ordnung der Nullstelle ablesen.

Betrachtet man die beiden ersten Reihen in Abbildung 17, so stellt man fest, daß sich die Graphen der Funktionen $z \mapsto z^n$ und $z \mapsto z^{-n}$ qualitativ gar nicht so viel unterscheiden. Die ersten werden zum Ursprung hin dunkler, weil dort eine Nullstelle liegt, die letzteren werden zum Ursprung hin heller, weil dort ein Pol liegt. Das Verhalten in der Nähe des Pols ist aber nach wie vor recht regulär und geordnet. Wie bei den Nullstellen kann man daran, wie oft sich eine Farbe beim Umlauf der Polstelle wiederholt, auch die Ordnung des Pols ablesen.

Die Funktionen in der letzten Reihe in Abbildung 17 haben jeweils im Ursprung eine wesentliche Singularität. Nach dem Satz von Casorati-Weierstraß bedeutet das, daß die Funktionswerte in der Nähe des Ursprungs jeder komplexen Zahl beliebig nahe kommen. Das führt zu einer Art irregulärer Farbexplosion, die sich in den Bildern gut beobachten läßt.

Die Bilder sind dem Skript von Herrn Barakat [Bar12] entnommen und wurden von ihm mit Hilfe von Sage erstellt.

Beispiel 6.23

Die Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1, i\} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \frac{(z+i)^3 \cdot e^{\frac{\pi i}{(z-i)^2}} \cdot \sin z}{(z-1) \cdot z \cdot (z+1)^2} \quad (5)$$

hat

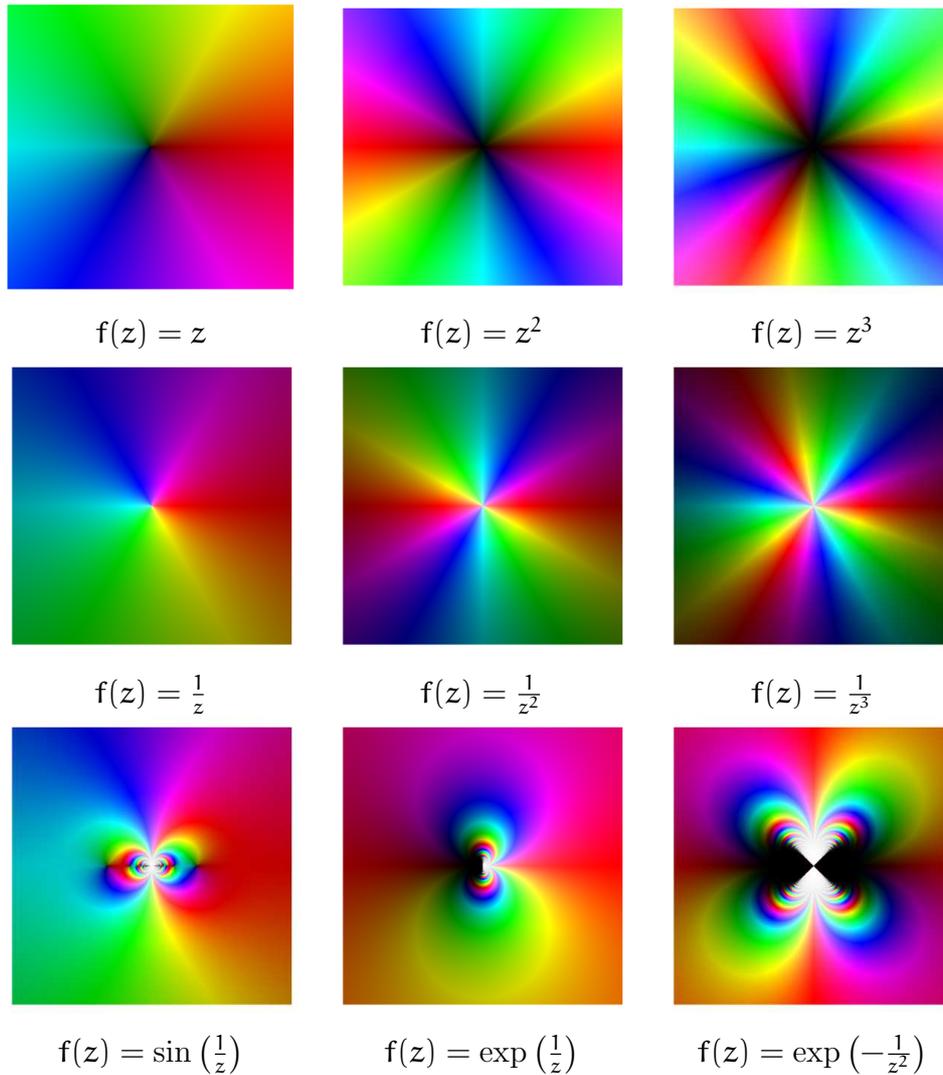


ABBILDUNG 17. Graphen einiger komplexer Funktionen

- in $z_0 = -i$ eine Nullstelle der Ordnung 3,
- in $z_1 = i$ eine wesentliche Singularität,
- in $z_2 = 1$ einen Pol der Ordnung 1,
- in $z_3 = -1$ einen Pol der Ordnung 2 und
- in $z_4 = 0$ eine hebbare Singularität, die keine Nullstelle ist.

Dies erkennt man sehr schön auch in Abbildung 18.

Aufgaben

Aufgabe 6.24

Bestimme alle Singularitäten folgender Funktionen und gib jeweils den Typ der Singularität ggf. inklusive der Polordnung an:

- a. $f(z) = \frac{e^z}{z^2}$.
- b. $f(z) = \frac{\cos(z)-1}{z^2}$.

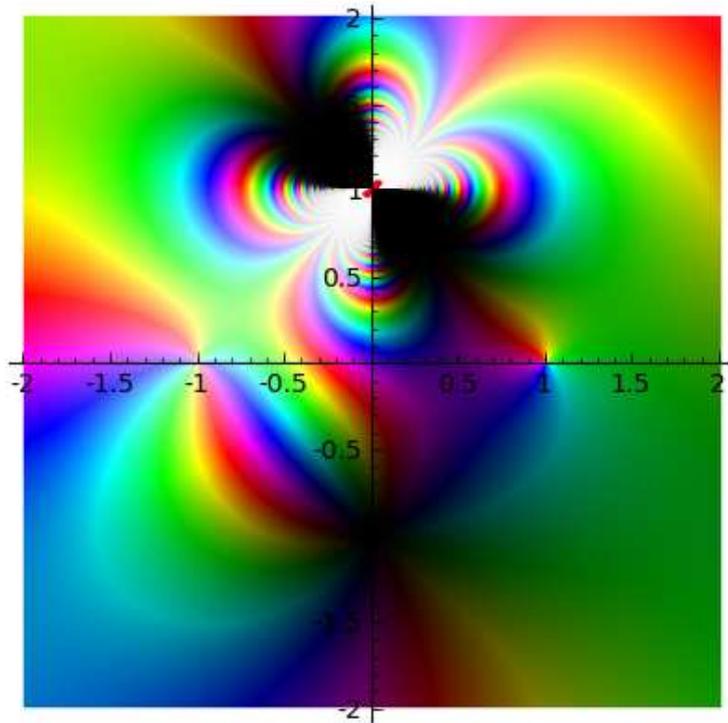


ABBILDUNG 18. Der Graph der Funktion in (5)

c. $f(z) = \frac{\cos(\frac{1}{z-2}) \cdot (e^{z-1} - 1)}{z^3 + 3z^2 - 4}$.

d. $f(z) = \frac{e^z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(n-1)!}}{z+1}$.

Aufgabe 6.25

Bestimme die Laurententwicklung folgender Funktionen auf $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$:

a. $f(z) = \frac{z^2}{(z-1)^3}$, $z_0 = 1$.

b. $f(z) = \frac{e^{3z}}{(z-1)^4}$, $z_0 = 1$.

c. $f(z) = e^{z+\frac{1}{z}}$, $z_0 = 0$.

d. $f(z) = z \cdot \cos\left(\frac{z}{z-1}\right)$, $z_0 = 1$.

Aufgabe 6.26

Was kann man aus dem Phasenportrait in Abbildung 19 über Nullstellen und Polstellen der Funktion ablesen?

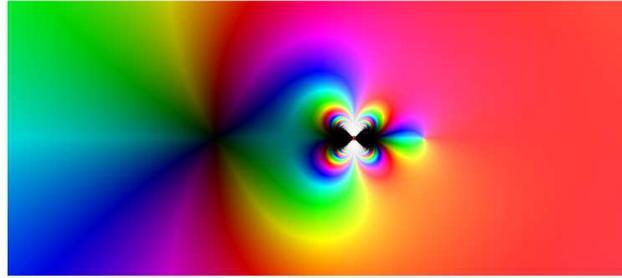


ABBILDUNG 19. Phasenportrait einer holomorphen Funktion

§ 7 Der Residuensatz und seine Anwendungen

Ziel dieses Abschnittes ist es, eine einfache Formel zur Berechnung von Kurvenintegralen über geschlossenen Wegen anzugeben, wenn der Integrand isolierte Singularitäten hat, um die der Weg läuft.

A) Umlaufzahlen

Beispiel 7.1 (Umlaufzahl)

Wir wollen uns in diesem Beispiel mehrere Parametrisierungen des Einheitskreises anschauen. Die naheliegendste und bisher stets verwendete Parametrisierung ist durch die Funktion

$$\gamma_1 : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C} : t \mapsto e^{2\pi i t}$$

gegeben. Sie startet und endet im Punkt $\gamma_1(0) = \gamma_1(1) = 1$ und durchläuft den Einheitskreis gegen den Uhrzeigersinn genau einmal.

Verdoppeln wir die Geschwindigkeit, mit der die Kurve durchlaufen wird, laufen aber genauso lange, so erhalten wir eine Parametrisierung

$$\gamma_2 : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C} : t \mapsto e^{4\pi i t},$$

die ebenfalls in $\gamma_2(0) = \gamma_2(1) = 1$ startet und als Bild den Einheitskreis hat. Sie durchläuft diesen jedoch zweimal gegen den Uhrzeigersinn.

Analog erhalten wir für eine beliebige ganze Zahl $0 \neq k \in \mathbb{Z}$ eine Parametrisierung

$$\gamma_k : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C} : t \mapsto e^{2k\pi i t},$$

die den Einheitskreis genau $|k|$ -mal durchläuft, für positive k gegen den Uhrzeigersinn, für negative im Uhrzeigersinn.

Wir wollen uns nun anschauen, wie ein Kurvenintegral sich ändert, wenn wir die unterschiedlichen Parametrisierungen verwenden. Als Integranden verwenden wir dazu die Funktion $z \mapsto \frac{1}{z}$, bei der wir nicht befürchten müssen, daß die Integrale alle den Wert 0 annehmen. Wir erhalten

$$\int_{\gamma_k} \frac{1}{z} dz = \int_0^1 \frac{1}{\gamma_k(t)} \cdot \gamma_k'(t) dt = \int_0^1 \frac{1}{e^{2k\pi i t}} \cdot 2k\pi i \cdot e^{2k\pi i t} dt = \int_0^1 2k\pi i dt = 2k\pi i.$$

Die Zahl

$$k = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma_k} \frac{1}{z} dz$$

gibt also an, wie oft und mit welcher Orientierung der Weg γ_k um den Ursprung läuft. Das motiviert die Definition der Umlaufzahl eines Weges in Definition 7.2.

In Lemma 4.2 hatten wir gesagt, daß ein Kurvenintegral nur von der Spur des Weges und seiner Orientierung abhängt. Wir sehen hier, daß diese Aussage richtig interpretiert werden muß! Sich die Spur nur als Menge anzuschauen, reicht nicht ganz aus. Man beachte aber, daß die Wege γ_k und γ_l für $k \neq l$ nicht durch eine Umparametrisierung wie in Lemma 4.2 ineinander überführt werden können!

Definition 7.2 (Umlaufzahl)

Für einen stückweise \mathcal{C}^1 -Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ und ein $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma)$ nennen wir

$$\text{ind}_{z_0}(\gamma) := \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz$$

die *Umlaufzahl* des Weges γ um z_0 oder den *Index* von γ in z_0 .

Wir nennen den Bereich

$$\text{Int}(\gamma) := \{z \in \mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma) \mid \text{ind}_z(\gamma) \neq 0\}$$

das *Innere* der Kurve γ und

$$\text{Ext}(\gamma) := \{z \in \mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma) \mid \text{ind}_z(\gamma) = 0\}$$

das *Äußere* von γ .

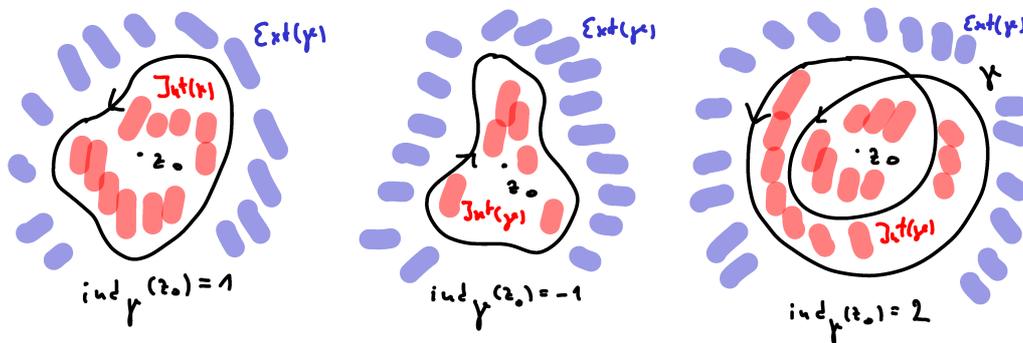


ABBILDUNG 20. Die Umlaufzahl, das Innere und das Äußere von γ

Bemerkung 7.3 (Zerlegung der Ebene durch einen Weg)

Die Spur eines stückweise \mathcal{C}^1 -Weges liefert eine disjunkte Zerlegung der komplexen Zahlenebene in Gebiete, in denen die Umlaufzahl konstant ist (siehe Abbildung 21).

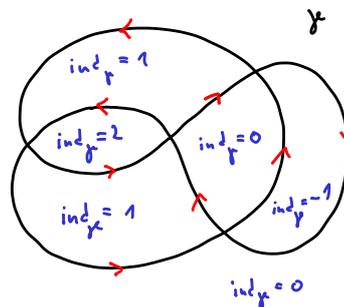


ABBILDUNG 21. Partitionierung von $\mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma)$ durch γ

Beispiel 7.4

Der Weg γ in Abbildung 22 läßt sich als Summe

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$$

zweier Wege schreiben, wobei γ_1 der Weg sein soll, der den Rand des kleinen Quadrates durchläuft und γ_2 der verbleibende Weg ist.

Für einen Punkt z_0 im Inneren des kleinen Quadrates gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma_1} \frac{1}{z - z_0} dz = 1,$$

weil der Rand des Quadrates homotop zu einem Kreis um z_0 ist. Analog gilt auch

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma_2} \frac{1}{z - z_0} dz = 1$$

in diesem Fall und wir erhalten insgesamt

$$\text{ind}_{z_0}(\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma_1} \frac{1}{z - z_0} dz + \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma_2} \frac{1}{z - z_0} dz = 1 + 1 = 2.$$

Für einen Punkt z_0 im Inneren von γ_2 , aber außerhalb des Quadrates erhalten wir entsprechend

$$\text{ind}_{z_0}(\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma_1} \frac{1}{z - z_0} dz + \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma_2} \frac{1}{z - z_0} dz = 0 + 1 = 1,$$

und für einen Punkt z_0 der auch außerhalb von γ_2 liegt erhalten wir schließlich

$$\text{ind}_{z_0}(\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma_1} \frac{1}{z - z_0} dz + \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma_2} \frac{1}{z - z_0} dz = 0 + 0 = 0.$$

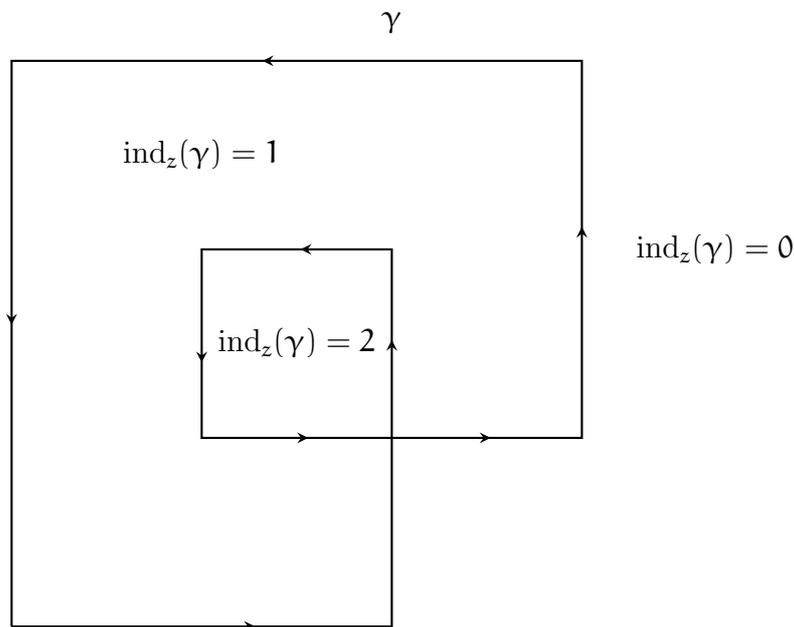


ABBILDUNG 22. Der Weg $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$

Bemerkung 7.5 (Berechnung der Umlaufzahl)

Will man die Umlaufzahl eines Weges γ um einen Punkt z_0 mit einfachen Mitteln berechnen, so kann man eine Gerade g durch den Punkt z_0 legen, die die Spur des Weges transversal schneidet, d.h. die Gerade geht nicht durch Kreuzungspunkte des Weges und ist nirgendwo tangential an den Weg. Vom Punkt z_0 aus betrachtet

schaut man in *eine* der beiden Richtungen der Geraden zählt man, wie oft der Weg γ die Gerade g gegen Uhrzeigersinn (+) schneidet und wie oft er g im Uhrzeigersinn (−) schneidet. Die Differenz der beiden Zahlen ist die Umlaufzahl von γ um z_0 .

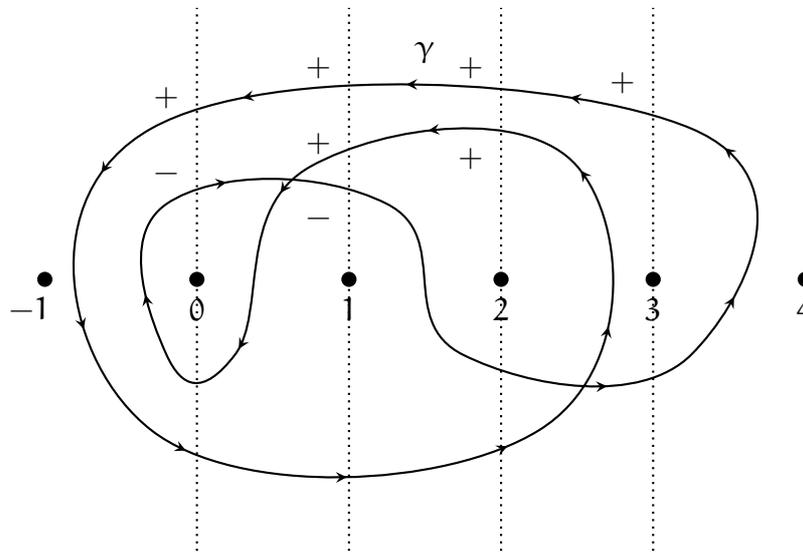


ABBILDUNG 23. Ein Weg mit Umlaufzahlen 0, 1 und 2

Beispiel 7.6 (Berechnung der Umlaufzahl)

Wir betrachten die Kurve γ in Abbildung 23 und wollen die Umlaufzahl für die Zahlen $z_0 = 0$, $z_1 = 1$, $z_2 = 2$, $z_3 = 3$ und $z_4 = 4$ berechnen. Dazu zeichnen wir durch jeden der Punkte eine Gerade parallel zur y -Achse und stellen fest, daß diese die Kurve jeweils transversal schneidet. Die Berechnet man die Umlaufzahlen um die z_i mit der Methode in Bemerkung 7.5, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \text{ind}_{z_0}(\gamma) &= 1 - 1 = 0, \\ \text{ind}_{z_1}(\gamma) &= 2 - 1 = 1, \\ \text{ind}_{z_2}(\gamma) &= 2 - 0 = 2, \\ \text{ind}_{z_3}(\gamma) &= 1 - 0 = 1, \\ \text{ind}_{z_4}(\gamma) &= 0 - 0 = 0, \end{aligned}$$

indem wir jeweils die Anzahl der Pluszeichen und der Minuszeichen oberhalb des Punktes z_j zählen und voneinander subtrahieren. Damit liegt der Punkt z_0 in der Tat im Äußeren der Kurve γ , was auf den ersten Blick nicht offensichtlich war.

B) Das Residuum

Definition 7.7 (Residuum)

Hat eine holomorphe Funktion $f : D \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ in z_0 eine isolierte Singularität und besitzt sie lokal in z_0 die Laurententwicklung $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n$, so nennen wir die komplexe Zahl

$$\text{res}_{z_0}(f) := a_{-1}$$

das *Residuum* von f in z_0 .

Bemerkung 7.8 (Residuum)

Ist die Laurentreihe von f lokal in z_0 in Definition 7.7 auf dem Kreisring $\mathbb{R}_{0,R}(z_0) = \mathbb{K}_R(z_0) \setminus \{z_0\}$ definiert und ist $0 < \rho < R$, so gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{|z-z_0|=\rho} f(z) \, dz = \frac{1}{2\pi i} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot \int_{|z-z_0|=\rho} (z-z_0)^n \, dz = a_{-1} = \operatorname{res}_{z_0}(f),$$

weil $(z-z_0)^n$ für $n \neq -1$ eine Stammfunktion besitzt. Ist $f = f^- + f^+$ die Laurent-Zerlegung von f auf dem Kreisring, dann gilt zudem

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{|z-z_0|=\rho} f^-(z) \, dz = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{|z-z_0|=\rho} f(z) \, dz = \operatorname{res}_{z_0}(f),$$

da die Funktion f^+ auf dem Kreisring holomorph ist und ihr Integral mithin den Wert 0 hat.

Beispiel 7.9

- a. Hat f in z_0 eine hebbare Singularität, so ist das Residuum $\operatorname{res}_{z_0}(f) = 0$.

Damit gilt zum Beispiel

$$\operatorname{res}_{\pi}(\cos) = 0.$$

- b. Hat eine Funktion f in z_0 eine einfache Polstelle, so gilt (siehe Proposition 7.10

a.) mit $f(z) = \frac{g(z)}{z-z_0}$ für das Residuum

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) = g(z_0) \neq 0.$$

Damit gilt zum Beispiel

$$\operatorname{res}_0 \left(\frac{\cos(z)}{z^3 + 2z} \right) = \frac{\cos(0)}{0^2 + 2} = \frac{1}{2}.$$

- c. Die Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \sin\left(\frac{1}{z}\right)$$

hat in der wesentlichen Singularität $z_0 = 0$ das Residuum

$$\operatorname{res}_0(f) = 1,$$

weil f in 0 die folgende Laurententwicklung hat:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n+1)! \cdot z^{2n+1}} = \frac{1}{z} - \frac{1}{6z^3} + \dots$$

- d. Die Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto e^{-\frac{1}{z^2}}$$

hat in der wesentlichen Singularität $z_0 = 0$ das Residuum

$$\operatorname{res}_0(f) = 0,$$

weil f in 0 die folgende Laurententwicklung hat:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n! \cdot z^{2n}} = 1 - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2z^4} + \dots$$

Proposition 7.10 (Rechenregeln für Residuen)

Es sei z_0 eine nicht-wesentliche isolierte Singularität von f und g .

a. Ist g holomorph in z_0 , so gilt

$$\operatorname{res}_{z_0} \left(\frac{g(z)}{(z-z_0)^m} \right) = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}.$$

Insbesondere gilt also

$$\operatorname{res}_{z_0} \left(\frac{g(z)}{z-z_0} \right) = g(z_0).$$

b. Hat g in z_0 eine einfache Nullstelle und ist f holomorph in z_0 , so gilt

$$\operatorname{res}_{z_0} \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

c. Hat f in z_0 eine Nullstelle der Ordnung m , so gilt $\operatorname{res}_{z_0} \left(\frac{f'}{f} \right) = m$.

d. Hat f in z_0 eine Polstelle der Ordnung m , so gilt $\operatorname{res}_{z_0} \left(\frac{f'}{f} \right) = -m$.

e. Ist g holomorph in z_0 und f nicht die Nullfunktion, so gilt

$$\operatorname{res}_{z_0} \left(g \cdot \frac{f'}{f} \right) = g(z_0) \cdot \operatorname{res}_{z_0} \left(\frac{f'}{f} \right).$$

f. Für $a, b \in \mathbb{C}$ gilt $\operatorname{res}_{z_0}(af + bg) = a \cdot \operatorname{res}_{z_0}(f) + b \cdot \operatorname{res}_{z_0}(g)$.

Beweis:

a. Dies folgt aus der Taylorformel

$$\frac{g(z)}{(z-z_0)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!} \cdot (z-z_0)^{n-m} = \sum_{n=-m}^{\infty} \frac{g^{(n+m)}(z_0)}{(n+m)!} \cdot (z-z_0)^n.$$

b. Ist z_0 eine einfache Nullstelle von g , so liefert uns die Taylorformel

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z)}{g'(z_0) \cdot (z-z_0) + \text{T.h.O.}} = \frac{1}{z-z_0} \cdot \frac{f(z_0) + \text{T.h.O.}}{g'(z_0) + \text{T.h.O.}}.$$

Die Aussage folgt dann, weil der zweite Faktor holomorph in z_0 ist.

c. Wir schreiben $f(z) = (z-z_0)^m \cdot h(z)$ für eine in z_0 holomorphe Funktion h mit $h(z_0) \neq 0$ und erhalten

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m \cdot (z-z_0)^{m-1} \cdot h(z) + (z-z_0)^m \cdot h'(z)}{(z-z_0)^m \cdot h(z)} = \frac{m}{z-z_0} + \frac{h'(z)}{h(z)}.$$

Da der letzte Summand in z_0 holomorph ist, folgt die Behauptung.

d. Der Beweis geht wörtlich wie die Aussage für Nullstellen.

e. Die Beweis geht wie die Aussage für Nullstellen.

f. Die Aussage folgt unmittelbar aus der Definition des Residuums.

□

Beispiel 7.11

a. Die Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{i, -i\} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} = \frac{e^{iz}}{(z - i) \cdot (z + i)}$$

hat die beiden einfachen Polstellen $z_0 = i$ und $z_0 = -i$. Für die Residuen gilt

$$\operatorname{res}_i(f) = \frac{e^{i^2}}{i + i} = -\frac{i}{2e}$$

und

$$\operatorname{res}_{-i}(f) = \frac{e^{-i^2}}{-i - i} = \frac{ie}{2}.$$

b. Die Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin'(\pi z)}{\sin(\pi z)}$$

hat in jeder ganzen Zahl z_0 einen einfachen Pol, so daß wir

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) = \frac{1}{\pi}$$

für $z_0 \in \mathbb{Z}$ erhalten.

c. Die Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{i, -i\} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \frac{1}{(z^2 + 1)^3} = \frac{1}{(z - i)^3} \cdot \frac{1}{(z + i)^3}$$

hat in $z_0 = i$ einen Pol der Ordnung 3 und es gilt

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z - i)^3}$$

für die in $z_0 = i$ holomorphe Funktion

$$h : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \frac{1}{(z + i)^3}.$$

Wegen

$$h^{(2)}(z) = \frac{12}{(z + i)^5}$$

erhalten wir also

$$\operatorname{res}_i(f) = \frac{h^{(2)}(i)}{2!} = \frac{12}{(2i)^5 \cdot 2} = -\frac{3i}{16}.$$

C) Der Residuensatz**Satz 7.12** (Der Residuensatz)

Es sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $z_1, \dots, z_k \in G$ seien paarweise verschieden und $f : G \setminus \{z_1, \dots, z_k\} \longrightarrow \mathbb{C}$ sei holomorph. Für einen geschlossenen stückweise \mathcal{C}^1 -Weg γ in $G \setminus \{z_1, \dots, z_k\}$ gilt dann

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = 2\pi i \cdot \sum_{j=1}^k \operatorname{res}_{z_j}(f) \cdot \operatorname{ind}_{z_j}(\gamma).$$

Beweis: Lokal in z_j habe f die Laurentzerlegung

$$f = f_j^- + f_j^+.$$

Man beachte, daß die Hauptteile

$$f_j^- = \sum_{n=-1}^{-\infty} a_{j,n} \cdot (z - z_j)^n$$

jeweils auf $\mathbb{C} \setminus \{z_j\}$ holomorph sind, so daß die Funktion

$$g := f - f_1^- - \dots - f_k^- : G \setminus \{z_1, \dots, z_k\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

in jedem z_j eine hebbare Singularität hat. g läßt sich also holomorph auf G fortsetzen und, da G einfach zusammenhängend ist, wir erhalten aus dem Cauchyschen Integralsatz 4.10

$$0 = \int_{\gamma} g(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz - \sum_{j=1}^k \int_{\gamma} f_j^-(z) dz.$$

Da $(z - z_j)^n$ für $n \neq -1$ eine Stammfunktion hat, gilt

$$\int_{\gamma} f_j^-(z) dz = \sum_{n=-1}^{-\infty} a_{j,n} \cdot \int_{\gamma} (z - z_j)^n dz = a_{j,-1} \cdot 2\pi i \cdot \text{ind}_{z_j}(\gamma)$$

und wir erhalten

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^k \int_{\gamma} f_j^-(z) dz = 2\pi i \cdot \sum_{j=1}^k \text{res}_{z_j}(f) \cdot \text{ind}_{z_j}(\gamma).$$

□

Bemerkung 7.13 (Der Residuensatz und CIS / CIF)

Wendet man den Residuensatz auf eine holomorphe Funktion an, d.h. alle z_j sind hebbare Singularitäten und ihre Residuen sind mithin Null, so erhält man den Cauchyschen Integralsatz 4.10 als Spezialfall des Residuensatzes.

Der Residuensatz verallgemeinert auch die Cauchysche Integralformel und wendet man den Residuensatz für eine holomorphe Funktion f auf $\frac{f(z)}{z-z_0}$ an, so erhält man die folgende allgemeine Fassung der Cauchyschen Integralformel.

Korollar 7.14 (Allgemeine Cauchysche Integralformel)

Ist f holomorph auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet G und ist γ ein stückweise \mathcal{C}^1 -Weg in G , dann gilt für $z_0 \in G \setminus \text{Im}(\gamma)$

$$\text{ind}_{z_0}(\gamma) \cdot f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Beispiel 7.15

In Beispiel 7.11 haben wir die Residuen der Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{i, -i\} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} = \frac{e^{iz}}{(z - i) \cdot (z + i)}$$

in ihren Polstellen $z_0 = i$ und $z_1 = -i$ ausgerechnet. Wir sind deshalb in der Lage, das folgende Kurvenintegral auszurechnen:

$$\int_{|z|=2} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} dz = 2\pi i \cdot (\operatorname{res}_i(f) + \operatorname{res}_{-i}(f)) = 2\pi i \cdot \left(-\frac{i}{2e} + \frac{ie}{2} \right) = \frac{\pi \cdot (1 - e^2)}{e}.$$

Beispiel 7.16

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$$

aus Beispiel 7.11, die an jeder ganzen Zahl z einen einfachen Pol mit Residuum

$$\operatorname{res}_z(f) = \frac{1}{\pi}$$

hat. Wir wollen sie entlang des Weges in Abbildung 24 integrieren.

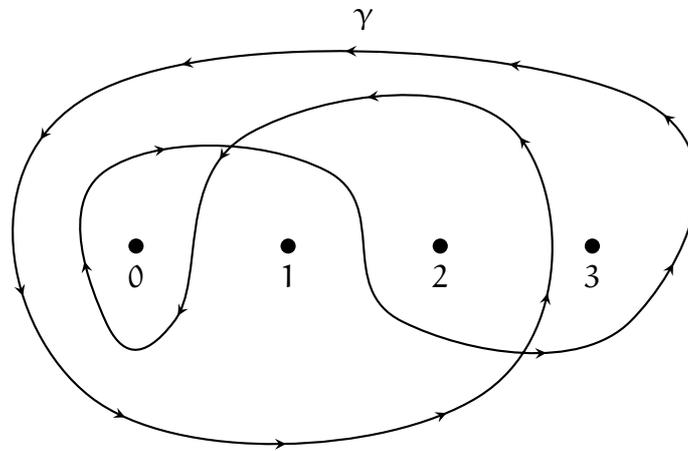


ABBILDUNG 24. Ein Weg mit Umlaufzahlen 0, 1 und 2

Zwar hat die Funktion auf \mathbb{C} unendlich viele singuläre Punkte, innerhalb jedes beschränkten Gebietes aber nur endlich viele, und der Weg γ verläuft natürlich innerhalb eines beschränkten Gebietes. Insofern ist der Residuensatz anwendbar.

Wir können unsere Betrachtung dabei auf die singulären Punkte $z_0 = 0$, $z_1 = 1$, $z_2 = 2$ und $z_3 = 3$ beschränken, da die Umlaufzahl von γ um alle anderen ganzen Zahlen ohnehin 0 ist, diese also im Äußeren der Kurve γ liegen. In Beispiel 7.6 haben wir die Umlaufzahlen bereits berechnet als

$$\operatorname{ind}_{z_0}(\gamma) = 0, \quad \operatorname{ind}_{z_1}(\gamma) = 1, \quad \operatorname{ind}_{z_2}(\gamma) = 2 \quad \text{und} \quad \operatorname{ind}_{z_3}(\gamma) = 1.$$

Als Wert des Kurvenintegrals erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} dz &= 2\pi i \cdot \sum_{j=0}^3 \operatorname{res}_{z_j}(f) \cdot \operatorname{ind}_{z_j} \gamma \\ &= 2\pi i \cdot \left(\frac{1}{\pi} \cdot 0 + \frac{1}{\pi} \cdot 1 + \frac{1}{\pi} \cdot 2 + \frac{1}{\pi} \cdot 1 \right) = 8i. \end{aligned}$$

Beispiel 7.17 (Laurententwicklung mit Hilfe des Residuensatzes)

Wir wollen die Laurententwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot z^n$$

der Funktion

$$f: \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \frac{z}{1-z} \cdot \cosh\left(\frac{1}{z}\right)$$

auf dem Kreisring $R_{0,1}(0) = K_1(0) \setminus \{0\}$ berechnen. Dabei ist

$$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2 \cdot n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{2 \cdot n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{2 \cdot n!} \cdot z^n$$

der Cosinus Hyperbolicus. Die Laurententwicklung des zweiten Faktors ist mithin

$$\cosh\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=-\infty}^0 \frac{1 + (-1)^n}{2 \cdot (-n)!} \cdot z^n.$$

Mittels der geometrischen Reihe können wir auch den ersten Faktor entwickeln und erhalten

$$\frac{z}{1-z} = z \cdot \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} z^n.$$

Statt das Produkt der beiden Reihen direkt auszurechnen, verwenden wir die Formel

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\cosh(\frac{1}{z})}{z^n \cdot (1-z)} dz = \text{res}_0 \left(\frac{\cosh(\frac{1}{z})}{z^n \cdot (1-z)} \right).$$

Um das Residuum auf der rechten Seite zu berechnen, müssen wir nur den Koeffizienten zu z^{-1} in der Reihe

$$\frac{\cosh(\frac{1}{z})}{z^n \cdot (1-z)} = \sum_{k=-\infty}^0 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1 + (-1)^k}{2 \cdot k!} \cdot z^{k+l-n}$$

berechnen. Betrachtet werden müssen also nur Summanden mit

$$k + l - n = -1$$

und $k \leq 0$ sowie $l \geq 0$, was gleichwertig ist zu $k \leq 0$ und

$$k = n - 1 - l \leq n - 1.$$

Wir erhalten also

$$a_n = \sum_{k=-\infty}^{\min\{0, n-1\}} \frac{1 + (-1)^k}{2 \cdot (-k)!} = \sum_{j=\max\{0, 1-n\}}^{\infty} \frac{1 + (-1)^j}{2 \cdot j!}.$$

Bemerkung 7.18 (Null- und Polstellenzählendes Integral)

Hat eine holomorphe Funktion f keine wesentlichen Singularitäten und umläuft ein Weg γ alle Pol- und Nullstellen von f mit Umlaufzahl eins, so ist

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P$$

die Differenz der Anzahl der Nullstellen und der Anzahl der Polstellen, wobei beide mit ihrer Ordnung als Vielfachheit gezählt werden. Dies folgt unmittelbar aus dem Residuensatz 7.12 und Proposition 7.10, da das Residuum der Funktion $\frac{f'}{f}$ an einer Null- oder Polstelle gerade deren Ordnung bzw. ihr Negatives ist.

Betrachten wir etwa die Funktion

$$f: \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \frac{z^2 + 1}{z^3 - z^2 - z + 1} = \frac{(z - i) \cdot (z + i)}{(z - 1)^2 \cdot (z + 1)},$$

dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{|z|=2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = (1 + 1) - (2 + 1) = -1.$$

Statt die obige Formel anzuwenden, kann man auch

$$h(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-z^3 - z^2 - 5z - 1}{(z - 1) \cdot (z + 1) \cdot (z - i) \cdot (z + i)} = \frac{g(z)}{(z - 1) \cdot (z + 1) \cdot (z - i) \cdot (z + i)}$$

berechnen und dann direkt den Residuensatz anwenden. Da der Zähler $g(z)$ des Bruchs an den Nullstellen des Nenners nicht verschwindet, hat die Funktion vier einfache Polstellen und aus dem Residuensatz folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{|z|=2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{|z|=2} \frac{g(z)}{(z - 1) \cdot (z + 1) \cdot (z - i) \cdot (z + i)} dz \\ &= \text{res}_1(h) + \text{res}_{-1}(h) + \text{res}_i(h) + \text{res}_{-i}(h) \\ &= \frac{g(1)}{(1 + 1) \cdot (1 - i) \cdot (1 + i)} + \frac{g(-1)}{(-1 - 1) \cdot (-1 - i) \cdot (-1 + i)} \\ &\quad + \frac{g(i)}{(i - 1) \cdot (i + 1) \cdot (i + i)} + \frac{g(-i)}{(-i - 1) \cdot (-i + 1) \cdot (-i - i)} \\ &= \frac{-8}{4} + \frac{4}{-4} + \frac{-4i}{-4i} + \frac{4i}{4i} = -2 - 1 + 1 + 1 = -1. \end{aligned}$$

Wir wollen im folgenden zeigen, wie man reelle Integrale mit Hilfe des Residuensatzes auf dem Umweg über die komplexen Zahlen berechnen kann. Dies war die wesentliche Motivation von Cauchy zur Entwicklung seiner Theorie.

D) Trigonometrische Integrale

Bemerkung 7.19 (Rationale Funktionen in zwei Unbestimmten)

Ein Ausdruck der Form

$$p = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_{i,j} \cdot x^i \cdot y^j$$

mit $a_{i,j} \in \mathbb{C}$ heißt ein Polynom über \mathbb{C} in den Unbestimmten x und y . Den Bruch

$$r = \frac{p}{q}$$

zweier solcher Polynome p und $q \neq 0$ nennen wir eine *rationale Funktion* über \mathbb{C} in den Unbestimmten x und y .

$$r = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

ist ein Beispiel für eine solche rationale Funktion.

Wir bezeichnen mit

$$\mathbb{C}(x, y) := \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \text{ Polynome in } x \text{ und } y, q \neq 0 \right\}$$

die Menge aller rationalen Funktionen über \mathbb{C} in den Unbestimmten x und y .

Korollar 7.20 (Trigonometrische Integrale)

Es sei $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{C}(x, y)$ eine rationale Funktion mit $q(x, y) \neq 0$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x^2 + y^2 = 1$. Dann gilt

$$\int_0^{2\pi} r(\cos(t), \sin(t)) dt = 2\pi i \cdot \sum_{z \in K_1(0)} \text{res}_z(f),$$

wobei

$$f(z) = \frac{1}{iz} \cdot r\left(\frac{z^2 + 1}{2z}, \frac{z^2 - 1}{2iz}\right).$$

Beweis: Für einen Punkt $z = e^{it} = \cos(t) + i \cdot \sin(t)$ auf dem Einheitskreis gilt

$$\frac{z^2 + 1}{2z} = \frac{1}{2} \cdot \left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{z + \bar{z}}{2} = \text{Re}(z) = \cos(t)$$

und

$$\frac{z^2 - 1}{2iz} = \frac{1}{2i} \cdot \left(z - \frac{1}{z}\right) = \frac{z - \bar{z}}{2i} = \text{Im}(z) = \sin(t).$$

Daraus erhalten wir

$$f(e^{it}) = \frac{r(\cos(t), \sin(t))}{ie^{it}}.$$

Man beachte dabei, daß f eine rationale Funktion in z ist, die aufgrund der an q gestellten Bedingung auf dem Rand des Einheitskreises keine Singularität hat. Wir können f also über den Rand des Einheitskreises integrieren und erhalten dabei

$$\int_{|z|=1} f(z) dz = \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \cdot ie^{it} dt = \int_0^{2\pi} r(\cos(t), \sin(t)) dt.$$

Die Aussage folgt dann aus dem Residuensatz, wenn wir beachten, daß die Umlaufzahl des Weges um jede Polstelle im Einheitskreis gerade 1 ist und daß das Residuum an allen Nicht-Polstellen von f den Wert 0 hat, so daß die Summe auf der rechten Seite endlich ist und nur an den Polstellen von f andere Werte annimmt. \square

Beispiel 7.21

Wir wollen das Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2a \cos(t) + a^2} dt$$

für alle $0 \neq a \in \mathbb{C} \setminus \partial K_1(0)$ berechnen.

Dazu betrachten wir die rationale Funktion

$$r(x, y) = \frac{1}{1 - 2ax + a^2}$$

und die sich daraus ergebende komplexe Funktion

$$f(z) = \frac{1}{iz} \cdot r \left(\frac{z^2 + 1}{2z}, \frac{z^2 - 1}{2iz} \right) = \frac{1}{iz} \cdot \frac{1}{1 - \frac{a \cdot (z^2 + 1)}{z} + a^2}$$

$$= \frac{i}{az^2 - (1 + a^2) \cdot z + a} = \frac{i}{a \cdot (z - \frac{1}{a}) \cdot (z - a)}.$$

Die Polstellen von f liegen also bei $z_0 = a$ und $z_0 = \frac{1}{a}$, und genau eine der beiden liegt im Einheitskreis. Beide Polstellen sind einfach, so daß sich ihr Residuum mit Proposition 7.10 leicht berechnen läßt.

Wenn $a \in K_1(0)$ im Einheitskreis liegt, erhalten wir aus Korollar 7.20

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2a \cos(t) + a^2} dt = 2\pi i \operatorname{res}_a(f) = 2\pi i \cdot \frac{i}{a \cdot (a - \frac{1}{a})} = \frac{2\pi}{1 - a^2}.$$

Wenn $\frac{1}{a} \in K_1(0)$ im Einheitskreis liegt, erhalten wir aus Korollar 7.20

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2a \cos(t) + a^2} dt = 2\pi i \operatorname{res}_{\frac{1}{a}}(f) = 2\pi i \cdot \frac{i}{a \cdot (\frac{1}{a} - a)} = \frac{2\pi}{a^2 - 1}.$$

E) Uneigentliche Integrale der Form $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$

Korollar 7.22 (Uneigentliche Integrale mit rationalem Integranden)

Es seien p und q zwei Polynomfunktionen auf \mathbb{C} mit $\deg(p) + 2 \leq \deg(q)$ und q habe keine reelle Nullstelle. Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(t)}{q(t)} dt = 2\pi i \cdot \sum_{j=1}^k \operatorname{res}_{z_j} \left(\frac{p}{q} \right),$$

wobei z_1, \dots, z_k genau die Polstellen von $\frac{p}{q}$ in der oberen Halbebene sind.

Beweisidee: Aufgrund der Bedingung an die Grade von p und q strebt die Funktion $\frac{p}{q}$ für $t \rightarrow \infty$ sehr schnell gegen 0 und das uneigentliche Integral existiert deshalb.

Wir wählen nun einen Radius r so groß, daß der Halbkreis in Abbildung 25 alle Residuen von $\frac{p}{q}$ in der oberen Halbebene enthält.

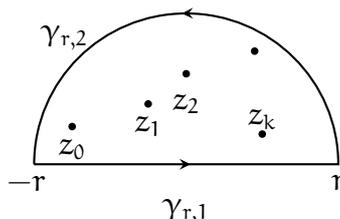


ABBILDUNG 25. Ein Halbkreis $\gamma_r = \gamma_{r,1} + \gamma_{r,2}$ als Integrationsweg

Der Weg $\gamma_r = \gamma_{r,1} + \gamma_{r,2}$ setzt sich aus dem Intervall $[-r, r]$ und dem Bogen des Halbkreises zusammen. Wir erhalten dann aus dem Residuensatz damit

$$\int_{\gamma_{r,1}} \frac{p(z)}{q(z)} dz + \int_{\gamma_{r,2}} \frac{p(z)}{q(z)} dz = 2\pi i \cdot \sum_{j=1}^k \operatorname{res}_{z_j} \left(\frac{p}{q} \right).$$

Den Wert des zweiten Integrals können wir wegen der Voraussetzung an q abschätzen durch

$$\left| \int_{\gamma_{r,2}} \frac{p(z)}{q(z)} dz \right| \leq l(\gamma_{r,2}) \frac{M}{r^2} = \frac{2\pi M}{r}$$

für eine universelle Konstante M , die nicht von r abhängt. Für $r \rightarrow \infty$ konvergiert der Wert des Integrals also gegen 0 .

Den Wert des ersten Integrals können wir mit der Parametrisierung

$$\gamma_{r,1} : [-r, r] \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto t$$

berechnen als

$$\int_{\gamma_{r,1}} \frac{p(z)}{q(z)} dz = \int_{-r}^r \frac{p(t)}{q(t)} dt.$$

Lassen wir nun r gegen unendlich gehen, so erhalten wir das gesuchte uneigentliche Integral. \square

Beispiel 7.23

Die rationale Funktion

$$f(z) = \frac{z^2}{1+z^4} = \frac{z^2}{(z-z_0) \cdot (z+z_0) \cdot (z-iz_0) \cdot (z+iz_0)}$$

hat die Polstellen (siehe Abbildung 26)

$$z_0 = e^{\frac{\pi i}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad z_1 = e^{\frac{3\pi i}{4}} = iz_0, \quad z_2 = e^{\frac{5\pi i}{4}} = -z_0 \quad \text{und} \quad z_3 = e^{\frac{7\pi i}{4}} = -iz_0.$$

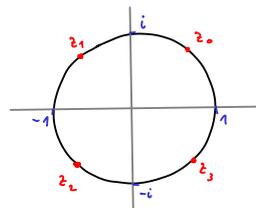


ABBILDUNG 26. Die Polstellen von f

Nur die ersten beiden liegen in der oberen Halbebene. Berechnen wir die Residuen in diesen Polstellen, so erhalten wir

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) = \frac{z_0^2}{(z_0+z_0) \cdot (z_0-iz_0) \cdot (z_0+iz_0)} = \frac{1}{4z_0}$$

und

$$\operatorname{res}_{iz_0}(f) = \frac{(iz_0)^2}{(iz_0-z_0) \cdot (iz_0+z_0) \cdot (iz_0+iz_0)} = \frac{1}{4iz_0}.$$

Wir erhalten aus Korollar 7.22 mithin

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt &= 2\pi i \cdot (\operatorname{res}_{z_0}(f) + \operatorname{res}_{iz_0}(f)) \\ &= 2\pi i \cdot \left(\frac{1}{4z_0} + \frac{1}{4iz_0} \right) = \frac{(i+1) \cdot \pi}{\sqrt{2} \cdot (1+i)} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Bemerkung 7.24 (Uneigentliche Integrale der Form $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$)

Man kann in Korollar 7.22 statt des Integranden $\frac{p}{q}$ auch einen allgemeineren Integranden f zulassen, wenn man fordert, daß

- f holomorph auf einer Menge ist, die die obere Halbebene bis auf endlich viele nicht-reelle Punkte enthält,
- das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$ existiert und
- $\lim_{|z| \rightarrow \infty} z \cdot f(z) = 0$.

Der Beweis funktioniert dann analog, wobei die letzte Bedingung sicher stellt, daß der Wert des Integrals über den Halbkreis gegen 0 konvergiert, wenn der Radius des Halbkreises gegen ∞ geht.

F) Uneigentliche Integrale der Form $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{i\alpha t} dt$

Korollar 7.25 (Uneigentliche Integrale der Form $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(t)}{q(t)} \cdot e^{i\alpha t} dt$)

Es seien p und q zwei Polynomfunktionen auf \mathbb{C} mit $\deg(p) + 1 \leq \deg(q)$ und q habe keine reelle Nullstelle.

a. Ist $\alpha > 0$, so gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(t)}{q(t)} \cdot e^{i\alpha t} dt = 2\pi i \cdot \sum_{j=1}^k \operatorname{res}_{z_j} \left(\frac{p(z)}{q(z)} \cdot e^{i\alpha z} \right),$$

wobei z_1, \dots, z_k genau die Polstellen von $\frac{p}{q}$ in der oberen Halbebene sind.

b. Ist $\alpha < 0$, so gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(t)}{q(t)} \cdot e^{i\alpha t} dt = -2\pi i \cdot \sum_{j=1}^k \operatorname{res}_{z_j} \left(\frac{p(z)}{q(z)} \cdot e^{i\alpha z} \right),$$

wobei z_1, \dots, z_k genau die Polstellen von $\frac{p}{q}$ in der unteren Halbebene sind.

Man beachte dabei, wenn p und q reelle Koeffizienten haben, dann gilt

$$\operatorname{Re} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(t)}{q(t)} \cdot e^{i\alpha t} dt \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(t)}{q(t)} \cdot \cos(\alpha t) dt$$

und

$$\operatorname{Im} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(t)}{q(t)} \cdot e^{i\alpha t} dt \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(t)}{q(t)} \cdot \sin(\alpha t) dt.$$

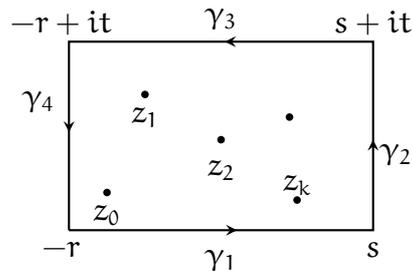


ABBILDUNG 27. Ein Rechteck $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_4$ als Integrationsweg

Beweis: Wir betrachten nur den Fall $\alpha > 0$ und wählen einen Rechteckrand als Weg γ , wie in Abbildung 27, der alle Singularitäten des Integranden $\frac{p(z)}{q(z)} \cdot e^{iaz}$ in der oberen Halbebene enthält. Dann zeigt man, daß die Integrale über γ_2 , γ_3 und γ_4 gegen Null konvergieren, wenn r , s und t gegen unendlich gehen, und das Integral über γ_1 konvergiert dann genau gegen das gewünschte uneigentliche Integral. Die Aussage folgt deshalb aus dem Residuensatz. \square

Beispiel 7.26

Für eine reelle Zahl $0 \neq a \in \mathbb{R}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\cos(t)}{t^2 + a^2} dt &= \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(t)}{t^2 + a^2} dt = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{Re} \left(2\pi i \cdot \operatorname{res}_{ia} \left(\frac{e^{iz}}{z^2 + a^2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \operatorname{Re} \left(2\pi i \cdot \operatorname{res}_{ia} \left(\frac{e^{iz}}{(z - ia) \cdot (z + ia)} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \operatorname{Re} \left(2\pi i \cdot \frac{e^{-a}}{2ia} \right) = \frac{\pi \cdot e^{-a}}{2a} \end{aligned}$$

aus Korollar 7.25, wobei wir für das erste Gleichheitszeichen beachten, daß der Integrand eine gerade Funktion ist.

Bemerkung 7.27 (Uneigentliche Integrale der Form $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{iat} dt$)

Die Aussage in Korollar 7.25 gilt wieder allgemeiner für Integranden $f(t) \cdot e^{iat}$, wenn f holomorph auf \mathbb{C} ohne endlich viele Punkte, die nicht reell sind, ist und $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$. Integrale dieser Form spielen im bei der Fouriertransformation eine wichtige Rolle (siehe Abschnitt 8.B)).

Aufgaben

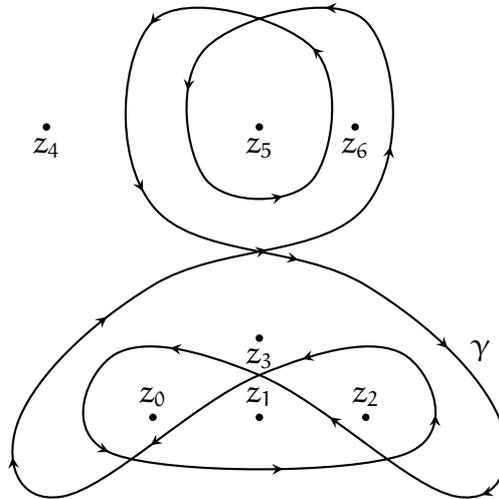
Aufgabe 7.28

Bestimme die Residuen der folgender Funktionen in z_0 :

- $f(z) = \frac{z^2}{(z-1)^3}$, $z_0 = 1$.
- $f(z) = \frac{e^{3z}}{(z-1)^4}$, $z_0 = 1$.
- $f(z) = e^{z+\frac{1}{z}}$, $z_0 = 0$.
- $f(z) = z \cdot \cos\left(\frac{z}{z-1}\right)$, $z_0 = 1$.

Aufgabe 7.29

Bestimme die Umlaufzahl der Kurve γ in folgendem Bild in den Punkten z_0, \dots, z_6 . Färbe das Innere der Kurve bunt ein.

**Aufgabe 7.30**

Bestimme die Singularitäten und Residuen folgender Funktionen:

- $f(z) = \frac{\cos(z)}{(z-\pi)^3}$.
- $f(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$.
- $f(z) = e^{z+\frac{1}{z}}$.
- $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z-i)^3}$.

Aufgabe 7.31

Berechne die folgenden eigentlichen und uneigentlichen Integrale:

- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin^2(t)} dt$.
- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+t^2)^4} dt$.
- $\int_0^{\infty} \frac{t \cdot \sin(t)}{t^2+4} dt$.

Integraltransformationen und die \mathcal{Z} -Transformation

§ 8 Die Laplace- und die Fouriertransformation

Ziel dieses Abschnittes ist es, Integraltransformationen kennenzulernen, die es erlauben, Differentialgleichungen zu lösen, indem Differentiation auf Multiplikation zurück geführt wird. In der folgenden Bemerkung beschreiben wir zunächst das grundlegende Vorgehen.

Bemerkung 8.1 (Integraltransformationen)

Wir betrachten einen \mathbb{R} -Vektorraum V von Funktionen

$$f : I \longrightarrow \mathbb{C}$$

auf einem Intervall I mit Intervallgrenzen $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, so daß das Integral

$$\mathcal{I}f(s) := \int_a^b k(t, s) \cdot f(t) \, dt \quad (6)$$

für alle s in einer Teilmenge G von \mathbb{C} existiert, wobei die Funktion

$$k : I \times G \longrightarrow \mathbb{C}$$

fest vorgegeben sei. Man nennt k den *Kern* der Integraltransformation. Integrale, wie in (6), die von einem Parameter s abhängen, nennt man auch *Parameterintegrale*.

Die Vorschrift (6) definiert uns eine neue Funktion

$$\mathcal{I}f : G \longrightarrow \mathbb{C} : s \mapsto \mathcal{I}f(s).$$

Wenn W ein geeigneter \mathbb{R} -Vektorraum ist, der alle Funktionen $\mathcal{I}f$ enthält, dann ist \mathcal{I} seinerseits eine Funktion

$$\mathcal{I} : V \longrightarrow W : f \mapsto \mathcal{I}f.$$

Man nennt diese einen *Integraloperator* und sie ist eine \mathbb{R} -lineare Abbildung zwischen den Vektorräumen V und W .

Ziel ist es, den Kern und die Vektorräume V und W so zu wählen, daß schwierige Funktionalgleichungen in V durch \mathcal{I} in einfach zu lösende Funktionalgleichungen in W überführt werden und daß der Integraloperator injektiv ist, d.h., daß zur Lösung der Funktionalgleichung in W eine eindeutige und hoffentlich ablesbare Lösung in V gehört.

Wir wollen dieses Vorgehen am Beispiel der Laplacetransformation und der Fouriertransformation untersuchen.

A) Die Laplacetransformation

Definition 8.2 (Laplace transformierte)

Für eine Funktion $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ nennen wir

$$\mathcal{L}f : (\alpha, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$$

mit

$$\mathcal{L}f(s) := \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot f(t) dt$$

die *Laplace transformierte* von f , sofern das Parameterintegral für jedes $s \in (\alpha, \infty)$ für ein geeignetes $\alpha \geq 0$ existiert.

Beispiel 8.3

a. Für die Funktion

$$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C} : t \mapsto t$$

berechnet man die Laplace transformierte (siehe Abbildung 1)

$$\mathcal{L}f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$$

mit Hilfe partieller Integration als

$$\begin{aligned} \mathcal{L}f(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot t dt = \frac{e^{-st} \cdot t}{-s} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{-s} dt \\ &= \frac{e^{-st} \cdot t}{-s} \Big|_0^{\infty} - \frac{e^{-st}}{s^2} \Big|_0^{\infty} = (0 - 0) - \left(0 - \frac{1}{s^2}\right) = \frac{1}{s^2}. \end{aligned}$$

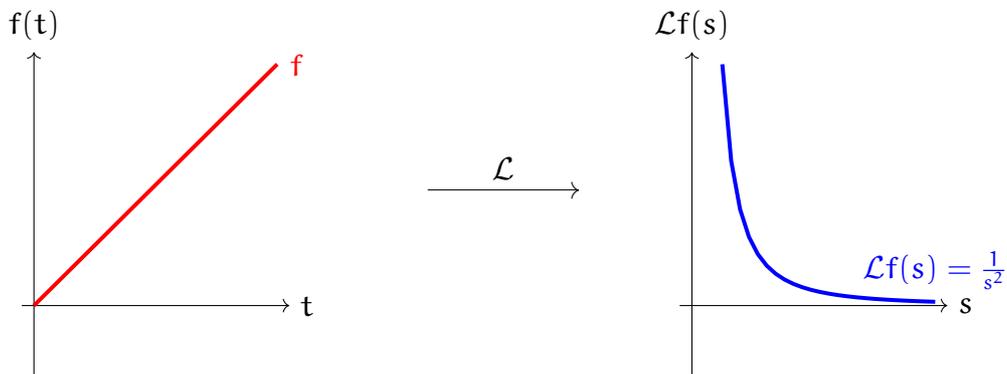


ABBILDUNG 1. Die Laplace transformierte von $f(t) = t$ ist $\mathcal{L}f(s) = \frac{1}{s^2}$

b. Allgemeiner kann man mit partieller Integration und Induktion nach dem Grad des Monoms zeigen, daß die Laplace transformierte der Funktion

$$f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C} : t \mapsto t^n$$

der folgenden Funktionsvorschrift für $s > 0$ genügt:

$$\mathcal{L}f_n(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

c. Die unstetige Funktion

$$f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{C} : t \mapsto \begin{cases} 1, & \text{für } 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & \text{für } t > 1, \end{cases}$$

hat die stetige Laplacetransformierte

$$\mathcal{L}f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{C}$$

mit

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^1 e^{-st} dt = \frac{1 - e^{-s}}{s}.$$

Die Laplacetransformation kann also unstetige Funktionen in stetige Funktionen überführen. Das liegt daran, daß isolierte Sprungstellen bei der Integration geglättet werden.

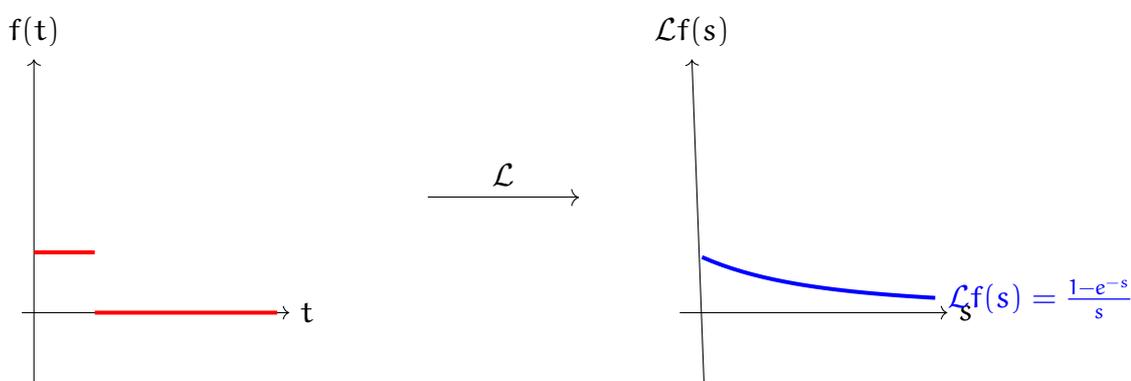


ABBILDUNG 2. Die Laplacetransformierte einer unstetigen Funktion

Bemerkung 8.4 (Umkehrung von \mathcal{L} für Funktionen von exponentiellem Typ)

Eine Funktion $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{C}$, die auf jedem abgeschlossenen Teilintervall $[a, b]$ von $[0, \infty)$ integrierbar ist, heißt von *exponentiellem Typ*, wenn es Konstanten $c > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ gibt, so daß

$$|f(t)| \leq c \cdot e^{at}$$

für alle $t \in [0, \infty)$ gibt. Anschaulich bedeutet dies, daß die Funktion f maximal linear exponentiell wächst. Die Menge

$$\mathcal{E} := \{f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ ist von exponentiellem Typ}\}$$

ist ein \mathbb{R} -Vektorraum von Funktionen, für die die Laplacetransformierte existiert. Ferner gilt für $f, g \in \mathcal{E}$ mit $\mathcal{L}f(s) = \mathcal{L}g(s)$ für alle $s > a$ auch

$$f(t) = g(t)$$

für fast alle $t \in [0, \infty)$, d.h. die Laplacetransformation auf \mathcal{E} ist im wesentlichen injektiv. Für eine stetige Funktion $f \in \mathcal{E}$ kann man dabei f aus der Laplacetransformierten $\mathcal{L}f$ mittels des Bromwichintegrals als

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma_r} e^{tz} \cdot \mathcal{L}f(z) dz$$

zurück gewinnen, wenn γ_r eine Parametrisierung der Strecke von $x - ir$ nach $x + ir$ in der komplexen Zahlenebene für ein $x > a$ ist.

Beispiel 8.5

- Polynomfunktionen sind von exponentiellem Typ, da polynomiales Wachstum schwächer als exponentielles Wachstum ist.
- Für $z \in \mathbb{C}$ ist die Funktion

$$f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{C} : t \mapsto e^{zt}$$

von exponentiellem Typ, da

$$|f(t)| = e^{\operatorname{Re}(z) \cdot t}.$$

Die Laplacetransformierte von f erfüllt dann

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty e^{(z-s) \cdot t} dt = \frac{e^{(z-s) \cdot t}}{z-s} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s-z}.$$

- Die Funktion

$$f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{C} : t \mapsto e^{(t^2)}$$

ist nicht von exponentiellem Typ, da $e^{t^2 - at}$ für alle $a > 0$ unbeschränkt ist, d.h. das Wachstum von f ist nicht mehr linear exponentiell.

Bemerkung 8.6 (Konvention)

Wir unterscheiden im allgemeinen sehr genau zwischen einer Funktion f und ihrer Funktionsvorschrift $f(t)$ oder dem Wert $f(a)$ der Funktion an einer Stelle a im Definitionsbereich. Der Laplaceoperator \mathcal{L} ist auf die Funktion anzuwenden, nicht auf die Funktionsvorschrift oder den Wert der Funktion an einer Stelle, d.h. Ausdrücke der Form $\mathcal{L}(f(\lambda t))$ sind an und für sich formal unkorrekt. Will man die Laplacetransformierte der Funktion

$$[0, \infty) \longrightarrow \mathbb{C} : t \mapsto f(\lambda t)$$

ansprechen, so müßte man dieser Funktion formal korrekt zunächst einen Namen geben, etwa g , und dann von $\mathcal{L}g$ sprechen. Dies ist jedoch umständlich und erschwert das Lesen von Rechenregeln, wie wir sie im folgenden Satz aufstellen wollen. Wir werden dort deshalb suggestive Notationen wie

$$\mathcal{L}(f(\lambda t))(s) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot f(\lambda t) dt$$

verwenden und überlassen die korrekte Interpretation dem Leser.

Satz 8.7 (Rechenregeln für die Laplacetransformation)

Es seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $f, g, h \in \mathcal{E}$ und alle vorkommenden Laplacetransformierten sollen auf (a, ∞) definiert sein. Dann gelten die folgenden Rechenregeln:

1) Linearität:

$$\mathcal{L}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{L}f + \mu \mathcal{L}g.$$

2) **Ähnlichkeitssatz:** Für $s > a$ gilt

$$\mathcal{L}(f(\lambda t))(s) = \frac{1}{\lambda} \cdot \mathcal{L}f\left(\frac{s}{\lambda}\right)$$

3) **Dämpfungssatz:** Für $s > a + \lambda$ gilt

$$\mathcal{L}(e^{\lambda t} \cdot f(t))(s) = \mathcal{L}f(s - \lambda)$$

4) **Verschiebungssatz:** Ist $g(t) = f(t - \lambda)$ für $t \geq \lambda$ und $g(t) = 0$ für $0 \leq t < \lambda$, so gilt für $s > a$

$$\mathcal{L}g(s) = e^{-\lambda s} \cdot \mathcal{L}f(s).$$

5) **Differentiation vor der Transformation:** Für $s > a$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathcal{L}f^{(n)}(s) = s^n \cdot \mathcal{L}f(s) - \sum_{j=0}^{n-1} f^{(j)}(0) \cdot s^{n-j-1},$$

wenn f n -fach stetig differenzierbar ist.

6) **Differentiation nach der Transformation:** Für $s > a$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{\partial^n}{\partial s^n} \mathcal{L}f(s) = (-1)^n \cdot \mathcal{L}(t^n f(t))(s).$$

7) **Integration vor der Transformation:** Für $s > 0$ gilt

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau) \, d\tau\right) = \frac{\mathcal{L}f(s)}{s}.$$

8) **Faltungssatz:** Für $s > a$ gilt

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = (\mathcal{L}f)(s) \cdot (\mathcal{L}g)(s),$$

wenn die einseitige Faltung

$$f * g : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{C}$$

durch die Vorschrift

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau) \cdot g(\tau) \, d\tau$$

definiert ist.

9) **Rechenregeln der Faltung:** Für die einseitige Faltung gelten:

- $f * g = g * f$,
- $f * (g * h) = (f * g) * h$,
- $(f + g) * h = f * h + g * h$,
- $f * \lambda g = \lambda f * g = \lambda \cdot (f * g)$.

Beweisidee: Die Linearität folgt unmittelbar aus der Definition von \mathcal{L} und der Linearität des Integrals. Den Ähnlichkeitssatz erhält man durch die Substitution $\tau = \lambda t$. Der Dämpfungssatz ergibt sich unmittelbar aus der Definition von \mathcal{L} . Den Verschiebungssatz erhält man durch die Substitution $\tau = t - \lambda$.

Den Beweis der Differentiation vor der Transformation führen wir für $n = 1$ vor und verwenden dazu partielle Integration:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}f'(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot f'(t) \, dt \\ &= e^{-st} \cdot f(t) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -s e^{-st} \cdot f(t) \, dt \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} \cdot f(t) - f(0) + s \mathcal{L}f(s) = s \mathcal{L}f(s) - f(0),\end{aligned}$$

da der Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} \cdot f(t)$ wegen der Konvergenz des uneigentlichen Integrals $\mathcal{L}f$ den Wert 0 haben muß. Damit ist die Aussage für $n = 1$ gezeigt, und für $n > 1$ folgt sie mittels Induktion nach n ebenfalls mit partieller Integration.

Die Regeln für die Differentiation nach der Transformation ergeben sich aus den Regeln für die Ableitung von Parameterintegralen:

$$\frac{\partial}{\partial s} \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot f(t) \, dt = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial s} e^{-st} \cdot f(t) \, dt = \int_0^{\infty} -t e^{-st} \cdot f(t) \, dt.$$

Die Regel für die Integration vor der Transformation folgt unmittelbar aus der Regel für die Differentiation vor der Transformation, wenn man diese auf die folgende Funktion anwendet:

$$F : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{C} : t \mapsto \int_0^t f(\tau) \, d\tau.$$

Der Faltungssatz ergibt sich im wesentlichen aus der folgenden Rechnung, wobei wir $u = t - \tau$ substituieren:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}f(s) \cdot \mathcal{L}g(s) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-su} \cdot f(u) \cdot e^{-s\tau} \cdot g(\tau) \, du \, d\tau \\ &= \int_0^{\infty} \int_{\tau}^{\infty} e^{-s \cdot (t-\tau)} \cdot f(t-\tau) \cdot e^{-s\tau} \cdot g(\tau) \, dt \, d\tau \\ &= \int_0^{\infty} \int_{\tau}^{\infty} e^{-s \cdot t} \cdot f(t-\tau) \cdot g(\tau) \, dt \, d\tau \\ &= \int_0^{\infty} e^{-s \cdot t} \cdot \int_0^t f(t-\tau) \cdot g(\tau) \, d\tau \, dt.\end{aligned}$$

Daß dabei die Reihenfolge der Integration vertauscht, ist nicht offensichtlich.

Die Rechenregeln für die Faltung ergeben sich unmittelbar aus der Definition. \square

Beispiel 8.8 (Die Laplacetransformierten von Sinus und Cosinus)

Um die Laplacetransformierten von Sinus und Cosinus zu berechnen, erinnern wir uns, daß

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$$

und

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}.$$

Aus der Linearität der Laplacetransformation und Beispiel 8.5 erhalten wir für $s > 0$ dann

$$\mathcal{L}(\cos(\omega t))(s) = \frac{\mathcal{L}(e^{i\omega t})(s) + \mathcal{L}(e^{-i\omega t})(s)}{2} = \frac{\frac{1}{s-i\omega} + \frac{1}{s+i\omega}}{2} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

und

$$\mathcal{L}(\sin(\omega t))(s) = \frac{\mathcal{L}(e^{i\omega t})(s) - \mathcal{L}(e^{-i\omega t})(s)}{2i} = \frac{\frac{1}{s-i\omega} - \frac{1}{s+i\omega}}{2i} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Bemerkung 8.9 (Liste von wichtigen Laplacetransformierten)

Wir geben hier der Übersicht halber eine Liste wichtiger Laplacetransformierter an:

$f(t)$	$\mathcal{L}f(s)$	$f(t)$	$\mathcal{L}f(s)$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	e^{zt}	$\frac{1}{s-z}$
$t^n e^{zt}$	$\frac{n!}{(s-z)^{n+1}}$	$\frac{\sin(t)}{t}$	$\operatorname{arccot}(s)$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$t \cdot \cos(\omega t)$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$t \cdot \sin(\omega t)$	$\frac{2s\omega}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$\cosh(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$	$\sinh(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
$t \cdot \cosh(\omega t)$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 - \omega^2)^2}$	$t \cdot \sinh(\omega t)$	$\frac{2s\omega}{(s^2 - \omega^2)^2}$
$e^{\lambda t} \cdot \cos(\omega t)$	$\frac{s - \lambda}{(s - \lambda)^2 + \omega^2}$	$e^{\lambda t} \cdot \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s - \lambda)^2 + \omega^2}$
$\delta(t - t_0)$	$e^{-t_0 s}$		

Dabei ist der *Cosinus Hyperbolicus* durch

$$\cosh(z) = \cos(iz) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

definiert und der *Sinus Hyperbolicus* durch

$$\sinh(z) = -i \sin(iz) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Zudem soll

$$\delta : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{C} : f \mapsto f(0)$$

die *Delta-Distribution* sein. Sie ist ein lineares Funktional und keine Funktion auf $[0, \infty)$, so daß Integrale mit δ als Integrandem neu definiert werden müssen:

$$\int_0^\infty \delta(t - t_0) \cdot f(t) \, dt := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_0 - \varepsilon}^{t_0 + \varepsilon} \frac{f(t)}{2\varepsilon} \, dt = f(t_0).$$

Delta-Distributionen werden verwendet, um Impulse zum Zeitpunkt t_0 zu modellieren (siehe [AHK⁺08, S. 1143ff.]).

Beispiel 8.10 (Ausschalten einer Stromquelle beim Schwingkreis)

Wir betrachten den Schwingkreis aus Beispiel 1.8 einen Serienschwingkreis mit einer Spannungsquelle V , einem Widerstand $R = 2$ Ohm, einer Spule der Induktivität $L = 1$ Henry und einem Kondensator der Kapazität $C = \frac{1}{2}$ Farad. Die Ladung $Q(t)$ der Kondensatorplatten zum Zeitpunkt t genügt der Differentialgleichung

$$L \cdot Q''(t) + R \cdot Q'(t) + \frac{1}{C} \cdot Q(t) = V(t)$$

und damit

$$Q''(t) + 2 \cdot Q'(t) + 2 \cdot Q(t) = V(t). \quad (7)$$

Gehen wir davon aus, daß die Spannungsquelle zum Zeitpunkt $t = 0$ angeschaltet und zum Zeitpunkt $t = 1$ wieder ausgeschaltet wird und zwischendurch konstant 1 Volt beträgt, d.h.

$$V(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & t > 1, \end{cases}$$

so lassen sich daraus die Anfangsbedingungen

$$Q(0) = Q'(0) = 0$$

ableiten.

Wir wollen die Differentialgleichung nun mit Hilfe der Laplacetransformation lösen. Wenden wir den Laplaceoperator \mathcal{L} auf (7) an, so erhalten wir die Gleichung

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V(s) &= \mathcal{L}Q''(s) + 2 \cdot \mathcal{L}Q'(s) + 2 \cdot \mathcal{L}Q(s) \\ &= (s^2 \cdot \mathcal{L}Q(s) - Q(0) \cdot s - Q'(0)) + 2 \cdot (s \cdot \mathcal{L}Q(s) - Q(0)) + 2 \cdot \mathcal{L}Q(s) \\ &= s^2 \cdot \mathcal{L}Q(s) + 2 \cdot s \cdot \mathcal{L}Q(s) + 2 \cdot \mathcal{L}Q(s) \\ &= (s^2 + 2s + 2) \cdot \mathcal{L}Q(s). \end{aligned}$$

Für die Funktion V haben wir in Beispiel 8.3 die Laplacetransformierte bereits ausgerechnet und erhalten somit

$$\mathcal{L}Q(s) = \frac{\mathcal{L}V(s)}{s^2 + 2s + 2} = \frac{1 - e^{-s}}{s \cdot (s^2 + 2s + 2)}.$$

Um die Rücktransformation durchführen zu können, ignorieren wir zunächst den Exponentialanteil der rechten Seite und suchen eine Funktion f mit

$$\mathcal{L}f(s) = \frac{1}{s \cdot (s^2 + 2s + 2)}.$$

Mit Hilfe von Partialbruchzerlegung formen wir die rechte Seite um:

$$\mathcal{L}f(s) = \frac{1}{s \cdot (s^2 + 2s + 2)} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{s} - \frac{(s+1) + 1}{(s+1)^2 + 1} \right).$$

Aus unserer Tabelle in Bemerkung 8.9 können wir die Funktion f dann ablesen als (siehe Abbildung 3):

$$f(t) = \frac{1 - e^{-t} \cdot \cos(t) - e^{-t} \cdot \sin(t)}{2} = \frac{1 - e^{-t} \cdot (\cos(t) - \sin(t))}{2}.$$

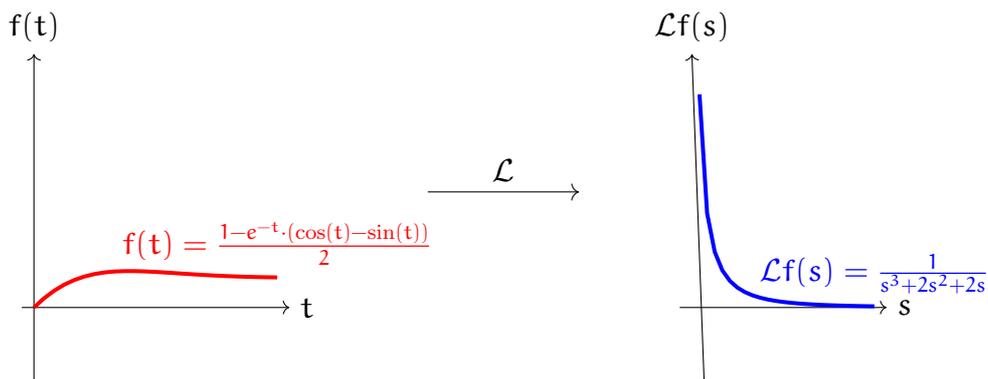


ABBILDUNG 3. Laplacetransformation beim Ausschalten einer Stromquelle

Mit Hilfe des Verschiebungssatzes können wir dann Q bestimmen, da im wesentlichen

$$e^{-s} \cdot \mathcal{L}f(s) = \mathcal{L}(f(t-1))(s)$$

gilt. Wir erhalten also (siehe Abbildung 4

$$Q(t) = \begin{cases} f(t), & \text{für } 0 \leq t \leq 1, \\ f(t) - f(t-1), & \text{für } t > 1. \end{cases}$$

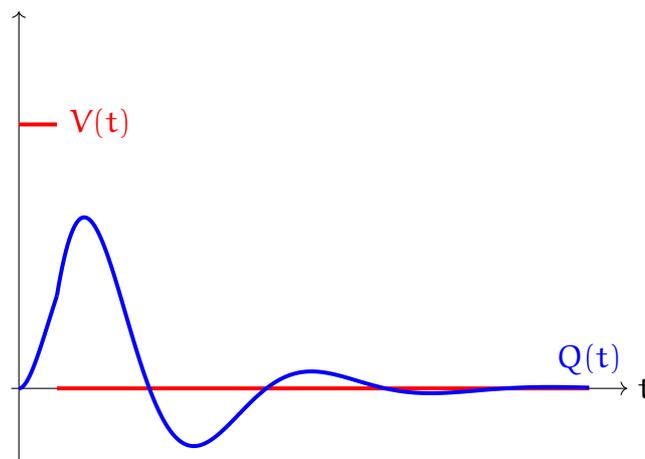


ABBILDUNG 4. Ausschalten der Stromquelle - $V(t)$ und $Q(t)$, qualitatives Verhalten

Beispiel 8.11 (Lösen eines Anfangswertproblems mittels Laplacetransformation)

Gesucht sei eine Funktion $f \in \mathcal{E}$, die dem Anfangswertproblem

$$t \cdot f''(t) - (t-1) \cdot f'(t) - 2f(t) = 0 \quad (8)$$

mit

$$f(0) = 1 \quad \text{und} \quad f'(0) = 2$$

genügt. Wenden wir den Laplaceoperator \mathcal{L} auf (8) an, so erhalten wir für die Laplacetransformierte

$$F := \mathcal{L}f$$

die Gleichung

$$\begin{aligned}
0 &= \mathcal{L}(tf''(t))(s) - \mathcal{L}(tf'(t))(s) + \mathcal{L}(f')(s) - 2\mathcal{L}f(s) \\
&= -\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{L}f''(s) + \frac{\partial}{\partial s}\mathcal{L}f'(s) + \mathcal{L}f'(s) - 2\mathcal{L}f(s) \\
&= -\frac{\partial}{\partial s}(s^2\mathcal{L}f(s) - f(0) \cdot s - f'(0)) + \frac{\partial}{\partial s}(s\mathcal{L}f(s) - f(0)) \\
&\quad + (s\mathcal{L}f(s) - f(0)) - 2\mathcal{L}f(s) \\
&= -\frac{\partial}{\partial s}(s^2 \cdot F(s) - s - 2) + \frac{\partial}{\partial s}(s \cdot F(s) - 1) + s \cdot F(s) - 1 - 2F(s) \\
&= -(2s \cdot F(s) + s^2 \cdot F'(s) - 1) + (F(s) + s \cdot F'(s)) + s \cdot F(s) - 1 - 2 \cdot F(s) \\
&= (s - s^2) \cdot F'(s) - (s + 1) \cdot F(s).
\end{aligned}$$

Um diese Differentialgleichung zu lösen, trennen wir zunächst die Variablen und erhalten

$$\ln |F(s)| = \int \frac{F'(s)}{F(s)} ds = \int \frac{s+1}{s-s^2} ds.$$

Mit Hilfe von Partialbruchzerlegung schreiben wir den Integranden der rechten Seite als

$$\frac{s+1}{s-s^2} = \frac{1}{s} - \frac{2}{s-1}.$$

Setzen wir dies im Integral ein, so erhalten wir

$$\ln |F(s)| = \int \frac{1}{s} ds - \int \frac{2}{s-1} ds = \ln |s| - 2 \cdot \ln |s-1| = \ln \left| \frac{s}{(s-1)^2} \right| + c$$

für eine Konstante c , und mit $d = \pm e^c$ dann auch

$$F(s) = d \cdot \frac{s}{(s-1)^2} = d \cdot \left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2} \right).$$

Die letzte Umformung mittels Partialbruchzerlegung haben wir nur durchgeführt, um die Rücktransformation leichter durchführen zu können, weil wir dann die in der rechten Seite auftretenden Funktionen als Laplacetransformierte von Funktionen aus \mathcal{E} in unserer Tabelle in Bemerkung 8.9 ablesen können. Wir erhalten auf dem Weg die Funktion

$$f(t) = d \cdot (e^t + t \cdot e^t).$$

Mit Hilfe der Anfangswertbedingungen läßt sich die Konstante d dann aus der Gleichung

$$1 = f(0) = d \cdot (e^0 + 0 \cdot e^0) = d$$

ablesen. Wir erhalten damit

$$f(t) = (1+t) \cdot e^t$$

als Lösung des Anfangswertproblems.

Beispiel 8.12 (Lösung einer Integralgleichung mittels Laplacetransformation)

Gesucht ist eine Funktion $f \in \mathcal{E}$, die der Gleichung

$$f(t) = \sin(t) + \int_0^t f(t - \tau) \cdot \sin(\tau) \, d\tau = \sin(t) + (f * \sin)(t)$$

genügt. Wenden wir den Laplaceoperator auf die Gleichung an, so erhalten wir mit Hilfe des Faltungssatzes für die Laplacetransformierte

$$F := \mathcal{L}f$$

die Gleichung

$$F(s) = \mathcal{L} \sin(s) + F(s) \cdot \mathcal{L} \sin(s)$$

und mithin

$$F(s) = \frac{\mathcal{L} \sin(s)}{1 - \mathcal{L} \sin(s)} = \frac{\frac{1}{s^2+1}}{1 - \frac{1}{s^2+1}} = \frac{1}{s^2}.$$

Aus unserer Tabelle in Bemerkung 8.9 können wir dann f ablesen als

$$f(t) = t.$$

Bemerkung 8.13 (Anwendung auf elektrische Netzwerke, siehe [Doe67], §20)

Hat man einen elektrischen Schaltkreis wie in Abbildung 5, dessen Spannung $u(t)$

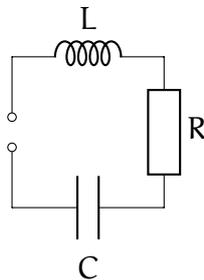


ABBILDUNG 5. Ein einfacher elektrischer LRC-Schaltkreis

und Stromstärke $i(t)$ sich in Abhängigkeit der Zeit t ändern, so erfüllen diese beiden Größen die Funktionalgleichung

$$u(t) = L \cdot \frac{\partial i}{\partial t}(t) + R \cdot i(t) + \frac{1}{C} \cdot \int_{-\infty}^t i(\tau) \, d\tau. \quad (9)$$

Der erste Summand der rechten Seite entspricht dabei dem Spannungsverlust an der Spule mit Induktivität L , der zweite Summand dem Spannungsverlust am Ohmschen Widerstand R und der dritte Summand dem Spannungsverlust am Kondensator mit Kapazität C .

Mit Hilfe der Laplacetransformation kann man die gemischte Differential- und Integralgleichung (9) in eine sehr viel einfachere algebraische Gleichung in Form des Ohmschen Gesetzes überführen. Der Einfachheit halber wollen wir annehmen, daß

bis zum Zeitpunkt $t = 0$ kein Strom geflossen ist, so daß das Integral auf der rechten Seite die Form

$$\int_{-\infty}^t i(\tau) \, d\tau = \int_0^t i(\tau) \, d\tau$$

annimmt. Wenden wir nun den Laplaceoperator an, so erhalten wir unter Beachtung der Rechenregeln für die Laplacetransformation 8.7

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u(s) &= L \cdot \mathcal{L}i'(s) + R \cdot \mathcal{L}i(s) + \frac{1}{C} \cdot \mathcal{L} \int_0^t i(\tau) \, d\tau \\ &= L \cdot (s \cdot \mathcal{L}i(s) - i(0)) + R \cdot \mathcal{L}i(s) + \frac{1}{C} \cdot \frac{\mathcal{L}i(s)}{s} \\ &= \left(Ls + R + \frac{1}{Cs} \right) \cdot \mathcal{L}i(s). \end{aligned}$$

Setzen wir $I(s) = \mathcal{L}i(s)$, $U(s) = \mathcal{L}u(s)$ und

$$Z(s) = Ls + R + \frac{1}{Cs},$$

so transformiert der Laplaceoperator die Funktionalgleichung 9 in die wesentlich einfachere Gleichung

$$U(s) = Z(s) \cdot I(s),$$

die einem Schaltkreis wie in Abbildung 6 entspricht, mit komplexem Widerstand

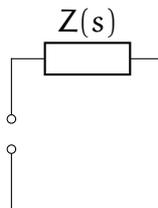


ABBILDUNG 6. Ein LRC-Schaltkreis nach Laplacetransformation

oder *Impedanz* $Z(s)$ und komplexem Leitwert oder *Admittanz* $\frac{1}{Z(s)}$.

Schaltet man mehrere elektrische Kreise in Serie oder parallel, so genügen die komplexen Widerstände und Leitwerte nach der Laplacetransformation den bekannten Kirchhoffschen Gesetzen, die auf einfach lösbare Probleme führen.

Auch kompliziertere Netzwerke mit mehreren Maschen lassen sich damit leichter behandeln. Betrachten wir etwa den Vierpol in Abbildung 7 mit bekannter Eingangsspannung $u_1(t)$ und gesuchter Ausgangsspannung $u_0(t)$. Gehen wir davon aus, daß der Strom $i_j(t)$ in jeder der drei Maschen im Uhrzeigersinn fließt, so erhalten wir

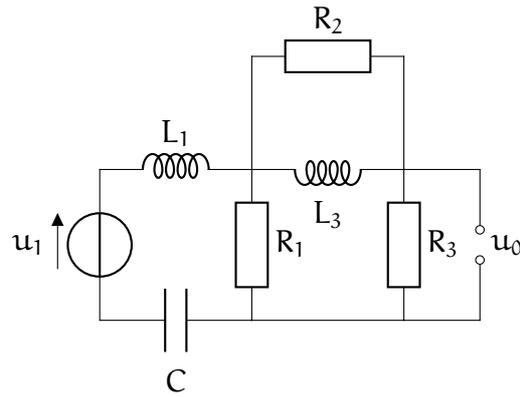


ABBILDUNG 7. Ein elektrisches Netzwerk

das Funktionalgleichungssystem:

$$\begin{aligned} R_1 \cdot i_1(t) + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i_1(t) - i_3(t) dt + L_1 \cdot \frac{\partial i_1}{\partial t}(t) &= u_1(t), \\ R_2 \cdot i_2(t) + L_3 \cdot \frac{\partial i_2 - i_3}{\partial t}(t) &= 0, \\ R_3 \cdot i_3(t) + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i_3(t) - i_1(t) dt + L_3 \cdot \frac{\partial i_3 - i_2}{\partial t}(t) &= 0, \\ R_3 \cdot i_3(t) - u_0(t) &= 0. \end{aligned}$$

Der Laplaceoperator transformiert das Funktionalgleichungssystem in ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \left(L_1 s + R_1 + \frac{1}{Cs} \right) \cdot I_1(s) & - & \frac{1}{Cs} \cdot I_3(s) & = U_1(s), \\ (R_2 + L_3 s) \cdot I_2(s) & - & L_3 s \cdot I_3(s) & = 0, \\ -\frac{1}{Cs} \cdot I_1(s) - & L_3 s \cdot I_2(s) + \left(L_3 s + R_3 + \frac{1}{Cs} \right) \cdot I_3(s) & = 0 \\ & & R_3 \cdot I_3(s) - U_0(s) & = 0. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Cramerschen Regel kann man eine geschlossene Formel für die Lösung $U_0(s)$ angeben als

$$U_0(s) = \frac{\det(B(s))}{\det(A(s))} = U_1(s) \cdot \frac{R_3 L_3 \cdot s + R_2 R_3}{p(s)}$$

wenn

$$A(s) = \begin{pmatrix} L_1 s + R_1 + \frac{1}{Cs} & 0 & -\frac{1}{Cs} & 0 \\ 0 & (R_2 + L_3 s) & -L_3 s & 0 \\ -\frac{1}{Cs} & -L_3 s & L_3 s + R_3 + \frac{1}{Cs} & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & -1 \end{pmatrix}$$

die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems ist,

$$B(s) = \begin{pmatrix} L_1 s + R_1 + \frac{1}{C_s} & 0 & -\frac{1}{C_s} & U_1(s) \\ 0 & (R_2 + L_3 s) & -L_3 s & 0 \\ -\frac{1}{C_s} & -L_3 s & L_3 s + R_3 + \frac{1}{C_s} & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 \end{pmatrix}$$

die Matrix ist, die aus der Koeffizientenmatrix entsteht, indem man die letzte Spalte durch die Inhomogenität des Gleichungssystems ersetzt und

$$p(s) = (L_1 C R_2 L_3 + L_1 C R_3 L_3) \cdot s^3 + (L_1 C R_2 R_3 + L_1 L_3 + R_1 C R_2 L_3 + R_1 C R_3 L_3) \cdot s^2 \\ + (L_1 R_2 + R_1 C R_2 R_3 + R_1 L_3 + R_2 L_3 + R_3 L_3) \cdot s + (R_1 R_2 + R_2 R_3).$$

Wenn man die Konstanten des Netzwerks sowie die Eingangsfunktion u_1 kennt, kann man die Laplacetransformierte $U_0(s)$ konkret angeben und ggf. rücktransformieren, um u_0 zu bestimmen.

B) Die Fouriertransformation

Definition 8.14 (Fourierformierte)

Für eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nennen wir

$$\mathcal{F}f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

mit

$$\mathcal{F}f(s) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} \cdot f(t) dt$$

die *Fouriertransformierte* von f , sofern das Parameterintegral für jedes $s \in \mathbb{R}$ existiert.

Bemerkung 8.15 (Fouriertransformierte)

Wir möchten darauf hinweisen, daß die Definition der Fouriertransformierten in der Literatur nur bis auf Multiplikation mit einer Konstanten einheitlich ist. Das Parameterintegral in Definition 8.14 wird gelegentlich mit einem der Faktoren $\frac{1}{2\pi}$ oder $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ versehen. Liest man die Fouriertransformierten bestimmter Funktionen in Tabellen nach, so muß man wissen, ob ein und ggf. welcher Faktor verwendet wurde.

Bei der Fouriertransformierten hat sich die kurze Bezeichnung \hat{f} statt $\mathcal{F}f$ durchgesetzt. Wir werden im weiteren Verlauf in aller Regel aber bei der Notation $\mathcal{F}f$ bleiben, um die Analogie zur Laplacetransformation deutlich zu machen.

Beispiel 8.16

- a. Die Fouriertransformierte der unstetigen Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: t \mapsto \begin{cases} 1, & \text{für } -1 \leq t \leq 1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

ist die Funktion $\mathcal{F}f$ mit der Funktionsvorschrift (siehe Abbildung 8)

$$\mathcal{F}f(s) = \int_{-1}^1 e^{-ist} dt = \frac{e^{-ist}}{-is} \Big|_{-1}^1 = \frac{e^{-is} - e^{is}}{-is} = \frac{2 \sin(s)}{s}.$$

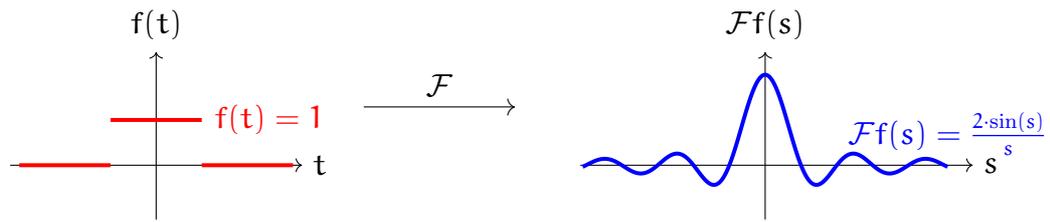


ABBILDUNG 8. Die Fouriertransformierte einer einfachen Treppenfunktion

b. Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : t \mapsto e^{-at^2}$$

hat für $a > 0$ als Graphen eine sogenannte Gauß-Glocke. Um die Fouriertransformierte von f zu berechnen, betrachten wir die Ableitung des Parameterintegrals nach s und erhalten durch partielle Integration folgenden funktionalen Zusammenhang:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{F}f(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial s} e^{-ist} \cdot e^{-at^2} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} -ite^{-ist} \cdot e^{-at^2} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} -ie^{-ist} \cdot te^{-at^2} dt \\ &= \frac{i}{2a} \cdot e^{-at^2} \cdot e^{-ist} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{s}{2a} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} \cdot e^{-at^2} dt \\ &= -\frac{s}{2a} \cdot \mathcal{F}f(s). \end{aligned}$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung, deren allgemeine Lösung $\mathcal{F}f$ mit

$$\mathcal{F}f(s) = c \cdot e^{-\frac{s^2}{4a}}$$

für ein beliebiges $c \in \mathbb{R}$ bestens bekannt ist. Um die Konstante zu bestimmen, berechnen wir die Funktion an der Stelle $s = 0$ und erhalten

$$c = \mathcal{F}f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Insbesondere ist die Fouriertransformierte einer Gauß-Glocke wieder eine Gauß-Glocke (siehe Abbildung 9).

c. Für die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \frac{1}{t^2 + a^2}$$

mit $a \in (0, \infty)$ können wir die Fouriertransformierte mit Hilfe von Korollar 7.25 ausrechnen. Dazu beachten wir, daß ai und $-ai$ die einzigen Singularitäten der

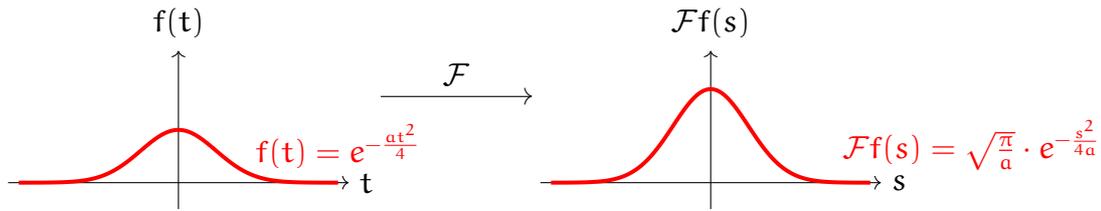


ABBILDUNG 9. Die Fouriertransformierte einer Gauß-Glocke komplexen Funktion

$$z \mapsto \frac{e^{-isz}}{z^2 + a^2} = \frac{e^{-isz}}{(z - ai) \cdot (z + ai)}$$

sind. Für $s > 0$ berechnen wir das Residuum an $-ai$ und erhalten

$$\text{res}_{-ai} \frac{e^{-isz}}{z^2 + a^2} = \frac{e^{-is \cdot (-ai)}}{-ai - ai} = -\frac{e^{-sa}}{2ai}.$$

Für die Fouriertransformierte gilt dann mit Korollar 7.25

$$\mathcal{F}f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} \cdot f(t) dt = -2\pi i \cdot \text{res}_{-ai} \frac{e^{-isz}}{z^2 + a^2} = \frac{\pi \cdot e^{-sa}}{a}.$$

Für $s < 0$ berechnen wir analog das Residuum an ai und erhalten

$$\text{res}_{ai} \frac{e^{-isz}}{z^2 + a^2} = \frac{e^{-isai}}{ai + ai} = \frac{e^{sa}}{2ai}.$$

sowie

$$\mathcal{F}f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} \cdot f(t) dt = 2\pi i \cdot \text{res}_{ai} \frac{e^{-isz}}{z^2 + a^2} = \frac{\pi \cdot e^{sa}}{a}.$$

Da die Fouriertransformierte mittels eines Parameterintegrals definiert ist und damit stetig sein muß, erhalten wir insgesamt

$$\mathcal{F}f(s) = \frac{\pi \cdot e^{-|s| \cdot a}}{a}$$

für alle $s \in \mathbb{R}$ (siehe Abbildung 10).

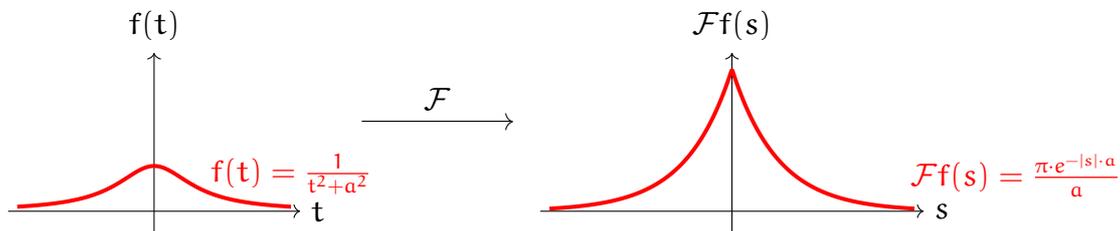


ABBILDUNG 10. Die Fouriertransformierte von $f(t) = \frac{1}{t^2+a^2}$

Bemerkung 8.17 (Umkehrung von \mathcal{F} auf dem Schwartz-Raum)

Für eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die auf \mathbb{R} integrierbar ist, die also zum Vektorraum

$$L(\mathbb{R}) := \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \text{ existiert} \right\}$$

gehört, existiert auch die Fouriertransformierte. Will man die Fouriertransformation aber rückgängig machen, so ist der Vektorraum $L(\mathbb{R})$ zu groß. Als gute Räume für diese Frage haben sich der *Schwartz-Raum*

$$S(\mathbb{R}) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid t^n \cdot f^{(k)} \in L(\mathbb{R}) \forall n, k \geq 0\}$$

und mit etwas Aufwand auch der Raum $L^2(\mathbb{R})$ der quadrat-integrierbaren Funktionen erwiesen.

Ist $f \in S(\mathbb{R})$, so ist auch $\mathcal{F}f \in S(\mathbb{R})$ und es gilt die *Umkehrformel von Plancherel*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} \cdot \mathcal{F}f(s) \, ds \quad (10)$$

für $t \in \mathbb{R}$, die es uns erlaubt, aus der Fouriertransformierten die Funktion selbst zurück zu gewinnen. Die Aussagen lassen sich mit etwas Aufwand und bei geeigneter Interpretation auf $L^2(\mathbb{R})$ verallgemeinern (siehe [AHK⁺08, S. 1151ff.]).

Setzt man

$$a(s) := \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \cos(st) \cdot f(t) \, dt$$

und

$$b(s) := \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \sin(st) \cdot f(t) \, dt,$$

so können wir (10) mit etwas Rechnen auch schreiben als

$$f(t) = \int_0^{\infty} (a(s) \cdot \cos(ts) + b(s) \cdot \sin(ts)) \, ds. \quad (11)$$

Wer mit der Fourierentwicklung 2π -periodischer Funktionen vertraut ist, wird die Analogie zur Darstellung einer solchen Funktion g als

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cdot \cos(kt) + b_k \cdot \sin(kt))$$

erkennen. Wir können die Darstellung (11) deshalb auch als Zerlegung der Funktion in harmonische Schwingungen ansehen, bei denen die Frequenz s alle Werte von 0 bis ∞ annehmen kann und bei denen die Amplituden $a(s)$ und $b(s)$ von den Frequenzen abhängen. Man nennt den Definitionsbereich der Fouriertransformierten deshalb auch den *Frequenzraum* von f . (Siehe auch [BHW13, S. 300].)

Satz 8.18 (Rechenregeln für die Fouriertransformation)

Es seien $f, g, h \in L^2(\mathbb{R})$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann gelten die folgenden Rechenregeln:

1) **Linearität:**

$$\mathcal{F}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{F}f + \mu \mathcal{F}g.$$

2) **Ähnlichkeitssatz:**

$$\mathcal{F}(f(\lambda t))(s) = \frac{1}{|\lambda|} \cdot \mathcal{F}f\left(\frac{s}{\lambda}\right)$$

3) **Verschiebungssatz:**

$$\mathcal{F}(f(t - \lambda))(s) = e^{-i\lambda s} \cdot \mathcal{F}f(s).$$

4) **Differentiation vor der Transformation:** Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathcal{F}f^{(n)}(s) = (-is)^n \cdot \mathcal{F}f(s).$$

5) **Differentiation nach der Transformation:** Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{\partial^n}{\partial s^n} \mathcal{F}f(s) = (-i)^n \cdot \mathcal{F}(t^n f(t))(s).$$

6) **Faltungssätze:** Ist $f \in L(\mathbb{R})$ oder $g \in L(\mathbb{R})$, so gilt

$$\mathcal{F}(f * g)(s) = (\mathcal{F}f)(s) \cdot (\mathcal{F}g)(s),$$

wenn die zweiseitige Faltung

$$f * g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

durch die Vorschrift

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) \cdot g(\tau) \, d\tau$$

definiert ist. Ist sogar $f \in S(\mathbb{R})$ oder $g \in S(\mathbb{R})$, so gilt auch

$$\mathcal{F}(f \cdot g)(s) = (\mathcal{F}f * \mathcal{F}g)(s).$$

Bemerkung 8.19 (Liste von wichtigen Fouriertransformierten)

Wir geben hier der Übersicht halber eine Liste wichtiger Fouriertransformierter an:

$f(t)$	$\mathcal{F}f(s)$	$f(t)$	$\mathcal{F}f(s)$
$e^{-a t }$	$\frac{2a}{a^2+s^2}$	e^{-at^2}	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{-\frac{s^2}{4a}}$
$\frac{1}{a^2+t^2}$	$\frac{\pi \cdot e^{-a \cdot s }}{a}$	$\frac{1}{a^2-t^2}$	$\frac{2 \cdot \sin(a \cdot s)}{ s }$
$\frac{t}{a^2+t^2}$	$\frac{\pi i s e^{-a \cdot s }}{ s }$	$\delta(t - t_0)$	e^{-ist_0}
$\chi_{[-1,1]}$	$\frac{2 \cdot \sin(s)}{s}$	$\chi_{[-1,1]} \cdot (1 - t)$	$\frac{4 \cdot \sin^2(\frac{s}{2})}{s^2}$

Wobei

$$\chi_{[-1,1]} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \begin{cases} 1, & \text{für } t \in [-1, 1], \\ 0, & \text{für } t \notin [-1, 1], \end{cases}$$

die charakteristische Funktion des Intervalls $[-1, 1]$ ist.

Beispiel 8.20 (Lösung der Wärmeleitungsgleichung)

Beschreibt $u(x, t)$ die Temperatur eines unendlich langen Stabes zum Zeitpunkt t an der Stelle x und ist die Temperaturverteilung zum Zeitpunkt $t = 0$ durch die Funktion f gegeben, genügt u der Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0 \tag{12}$$

mit der Anfangswertbedingung

$$u(x, 0) = f(x)$$

für $x \in \mathbb{R}$ und $t > 0$. Um diese zu lösen, halten wir t fest und lassen den Fourieroperator bezüglich x auf die Gleichung (12) los. Dies führt zu einer neuen Funktion

$$v(s, t) := \mathcal{F}(u(x, t))(s) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} \cdot u(x, t) \, dx.$$

Da das Parameterintegral mit der Differentiation nach t vertauscht und da die doppelte Ableitung nach x unter der Fouriertransformation zur Multiplikation mit $-s^2$ wird, erhalten wir aus (12) die neue Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} v(s, t) + s^2 \cdot v(s, t) = 0.$$

Die allgemeine Lösung dieser gewöhnlichen Differentialgleichung ist

$$v(s, t) = c(s) \cdot e^{-s^2 t}$$

für eine Funktion c , die wegen der Anfangswertbedingung der Gleichung

$$c(s) = v(s, 0) = \mathcal{F}f(s)$$

genügt. Beachten wir nun noch, daß

$$e^{-s^2 t} = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixs} \cdot e^{-\frac{x^2}{4t}} \, dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \cdot \mathcal{F}(e^{-\frac{x^2}{4t}})(s)$$

selbst eine Fouriertransformierte ist, so erhalten wir aus dem Faltungssatz

$$\mathcal{F}(u(x, t))(s) = v(s, t) = \mathcal{F}f(s) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \cdot \mathcal{F}(e^{-\frac{x^2}{4t}})(s) = \mathcal{F}(f * G_t)(s),$$

wobei

$$G_t(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}$$

die *Greensche Funktion* der Wärmeleitungsgleichung ist, mit $x \in \mathbb{R}$ und $t > 0$ (siehe Abbildung 11).

Durch Rücktransformation erhalten wir damit

$$u(x, t) = (f * G_t)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot e^{-\frac{(x-\tau)^2}{4t}} \, d\tau$$

als Lösung der Wärmeleitungsgleichung, mit $x \in \mathbb{R}$ und $t > 0$.

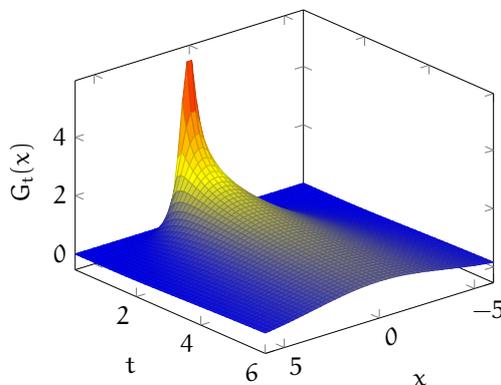


ABBILDUNG 11. Die Greensche Funktion der Wärmeleitungsgleichung

Beispiel 8.21 (Filtern von Signalen mittels Faltung)

Unser Ziel ist es, ein Signal durch eine Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

so zu filtern, daß im Frequenzraum alle Frequenzen außerhalb eines vorgegebenen Spektrums $[-\omega, \omega]$ ausgelöscht werden, während die Frequenzen innerhalb des Spektrums unverändert bleiben. Dies erreicht man im Frequenzraum durch Multiplikation mit der Funktion

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : s \mapsto \begin{cases} 1, & \text{für } |s| \leq \omega, \\ 0, & \text{für } |s| > \omega. \end{cases}$$

Ist nun f eine Funktion, deren Fouriertransformierte

$$\mathcal{F}f = g$$

die Funktion g ist, dann kann man die Tiefpaßfilterung des Signals durch Faltung mit f realisieren, da die Faltung nach dem Faltungssatz unter Fouriertransformation in die Multiplikation übergeht. Wie in Beispiel 8.16 kann man die Funktion f mit Hilfe der Umkehrformel von Plancherel berechnen (siehe Abbildung 12) und erhält

$$f(t) = \frac{\omega \cdot \sin(\omega t)}{\pi t}.$$

Für mehr Informationen hierzu siehe [AHK⁺08, S. 1156].

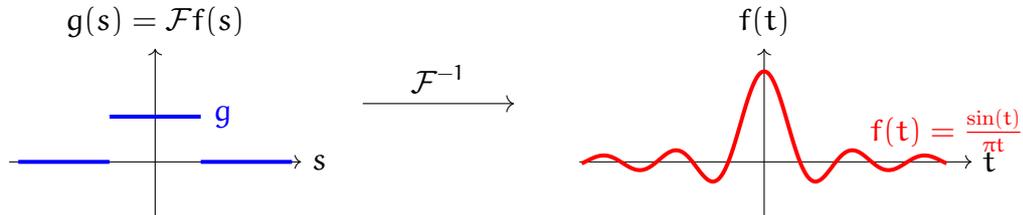


ABBILDUNG 12. Fouriertransformation beim idealen Tiefpassfilter

Aufgaben

Aufgabe 8.22

Berechnen Sie mit den Methoden aus dem Abschnitt zum Residuensatz die Fouriertransformierte

$$\mathcal{F}f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} \cdot f(t) dt$$

der Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \frac{t^2}{t^4 + 5t^2 + 4}$$

auf dem Intervall $(0, \infty)$, d.h. für $s > 0$.

§ 9 Die \mathcal{Z} -Transformation

Integraltransformationen erlauben es, Funktionen mit kontinuierlichem Definitionsbereich durch neue, transformierte Funktionen zu untersuchen. Wir haben dies erfolgreich bei der Lösung von Differentialgleichungen eingesetzt. Analog dazu ordnet die \mathcal{Z} -Transformation einer Funktion mit diskretem Definitionsbereich, sprich einer Zahlenfolge, eine transformierte Funktion zu, deren Untersuchung Rückschlüsse auf die Zahlenfolge zuläßt. Dies kann dann beim Studium von Differenzgleichungen eingesetzt werden, dem diskreten Analogon der Differentialgleichungen. Wie bei den Integraltransformationen ist es dabei wieder wichtig, daß man die \mathcal{Z} -Transformation umkehren kann, d.h., daß sie injektiv ist. (Die Ausarbeitung dieses Kapitels ist eng an [BHW13, Kap. 10] und [Doe67, §43] angelehnt.)

Motivation 9.1 (Diskrete Laplacetransformation)

Auch wenn man zeitkontinuierliche Phänomene untersuchen möchte, kann man in aller Regel nur diskret verteilte Daten dazu generieren. Statt also die Funktionswerte einer Funktion

$$f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{C}$$

an allen Werten $t \geq 0$ etwa durch Messungen bestimmen zu können, muß man sich damit begnügen, Messungen in festen Zeitabständen von je einer Zeiteinheit vorzunehmen und erhält so eine Zahlenfolge $(f_n)_{n \geq 0}$ mit

$$f_n = f(\mathbf{n}) \in \mathbb{C}.$$

Die unbekannte Funktion f kann man dann z.B. durch die Treppenfunktion

$$g : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{C}$$

mit

$$g(t) = f_n \quad \text{für} \quad \mathbf{n} \geq t < \mathbf{n} + 1$$

approximieren.

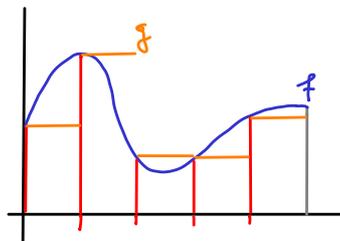


ABBILDUNG 13. Der Graph einer Treppenfunktion g als Approximation für f

Die Funktion g ist nur stückweise stetig, aber unter der Laplacetransformation geht sie in eine stetige Funktion über, für die wir eine einfache Reihendarstellung erhalten:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}g(s) &= \int_0^\infty e^{-st} \cdot g(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} e^{-st} \cdot f_n dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot \left. \frac{e^{-st}}{s} \right|_n^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot \frac{e^{-sn} - e^{-s \cdot (n+1)}}{s} = \frac{1 - e^{-s}}{s} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot e^{-sn}.\end{aligned}$$

Da der Faktor $\frac{1-e^{-s}}{s}$ unabhängig von den zugrundeliegenden Funktionen f und g ist, enthält die Reihe

$$\mathcal{D}g(s) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot e^{-sn}$$

dieselbe Information wie $\mathcal{L}g(s)$. $\mathcal{D}g$ wird die *diskrete Laplacetransformierte* von f genannt. Substituieren wir in der diskreten Laplacetransformierten

$$z = e^s,$$

so erhalten wir eine Laurentreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot z^{-n},$$

die wir in der folgenden Definition als \mathcal{Z} -Transformierte der Funktion f oder, genauer gesagt, der Folge $(f_n)_{n \geq 0}$ einführen wollen, da sie wie die diskrete Laplacetransformierte nur von der Folge $(f_n)_{n \geq 0}$ abhängt. Die \mathcal{Z} -Transformierte enthält dabei offenbar dieselbe Information wie die diskrete Laplacetransformierte.

Wenn wir akzeptieren, daß wir in vielen wichtigen Anwendungen statt der Funktion f nur eine diskrete Folge von Funktionswerten kennen und daß die Laplacetransformation ein wichtiges Hilfsmittel zur Lösung von Problemen ist, dann lohnt es, die \mathcal{Z} -Transformation genauer zu untersuchen.

Definition 9.2 (\mathcal{Z} -Transformation)

Es sei $(f_n)_{n \geq 0}$ eine Folge komplexer Zahlen. Wir nennen die Laurentreihe

$$\mathcal{Z}((f_n)_{n \geq 0}) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot z^{-n}$$

die \mathcal{Z} -Transformierte der Zahlenfolge.

Wenn keine Mißverständnisse zu befürchten sind, verwenden wir folgende Notationen

$$F^*(z) := \mathcal{Z}(f_n) := \mathcal{Z}((f_n)_{n \geq 0}) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot z^{-n}.$$

Bemerkung 9.3 (Konvergenzbereich der \mathcal{Z} -Transformierten)

Man beachte, daß

$$F^*\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot z^n$$

eine Potenzreihe über den komplexen Zahlen ist. Hat diese Reihe den Konvergenzradius $\rho > 0$, so ist die Laurentreihe $F^*(z) = \mathcal{Z}(f_n)$ auf dem Kreisring

$$R_{\frac{1}{\rho}, \infty}(0) = \mathbb{C} \setminus \overline{K_{\frac{1}{\rho}}(0)}$$

konvergent und definiert dort eine holomorphe Funktion

$$F^* : R_{\frac{1}{\rho}, \infty}(0) \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto F^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot z^{-n}.$$

Wir nennen $r = \frac{1}{\rho}$ dann den *Konvergenzradius* der \mathcal{Z} -Transformierten.

Beispiel 9.4

a. Die konstante Folge $(f_n)_{n \geq 0}$ mit $f_n = 1$ für alle $n \geq 0$ hat die \mathcal{Z} -Transformierte

$$F^*(z) = \mathcal{Z}(f_n) = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1},$$

wie man mit Hilfe der geometrischen Reihe sieht. Der Konvergenzradius ist entsprechend $r = 1$.

b. Die Folge $(f_n)_{n \geq 0}$ mit $f_n = c^n$ für alle $n \geq 0$ hat die \mathcal{Z} -Transformierte

$$F^*(z) = \mathcal{Z}(f_n) = \sum_{n=0}^{\infty} c^n \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{c}{z}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{c}{z}} = \frac{z}{z-c}.$$

Ihr Konvergenzradius ist $r = |c|$.

Bemerkung 9.5 (Umkehrung der \mathcal{Z} -Transformation)

Hat die Laurentreihe einer \mathcal{Z} -Transformation

$$\mathcal{Z}(f_n) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot z^{-n}$$

einen endlichen Konvergenzradius r und definiert somit eine holomorphe Funktion

$$F^* : R_{r, \infty}(0) \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot z^{-n},$$

so sind die Koeffizienten f_n der Laurentreihe durch diese eindeutig festgelegt und lassen sich nach Satz 6.9 berechnen als

$$f_n = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{|z|=r+\varepsilon} F^*(z) \cdot z^{n-1} dz$$

oder alternativ als

$$f_n = \frac{1}{n!} \cdot \frac{\partial^n}{\partial z^n} F^* \left(\frac{1}{z} \right) \Big|_{z=0}.$$

Die Menge der komplexen Zahlenfolgen, deren \mathcal{Z} -Transformierte einen endlichen Konvergenzradius hat, ist ein \mathbb{C} -Vektorraum und die \mathcal{Z} -Transformation ist auf diesem Vektorraum injektiv. Sie läßt sich durch obige Formel rücktransformieren.

Mit Hilfe des Residuensatzes kann man zudem die obigen Kurvenintegrale berechnen, wenn man in der Lage ist, die Residuen der Funktion $F^*(z) \cdot z^{n-1}$ an den Singularitäten z_1, \dots, z_k in der Kreisscheibe $K_{r+\varepsilon}(0)$ zu berechnen:

$$f_n = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{|z|=r+\varepsilon} F^*(z) \cdot z^{n-1} dz = \sum_{j=1}^k \operatorname{res}_{z_j}(F^*(z) \cdot z^{n-1}).$$

Beispiel 9.6

Gesucht ist eine Zahlenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so daß die \mathcal{Z} -Transformierte

$$F^*(z) = \frac{z \cdot (z-1)}{(z+1) \cdot (z-2)}$$

ist. Die Funktion ist auf dem Kreisring $R_{2,\infty}(0)$ holomorph und hat in der Kreisscheibe $K_2(0)$ zwei einfache Polstellen bei $z_1 = -1$ und bei $z_2 = 2$. Das gilt analog für die Funktionen

$$F^*(z) \cdot z^{n-1} = \frac{z^n \cdot (z-1)}{(z+1) \cdot (z-2)},$$

so daß sich die Residuen als

$$\operatorname{res}_{-1}(F^*(z) \cdot z^{n-1}) = \frac{(-1)^n \cdot (-1-1)}{-1-2} = \frac{(-1)^n \cdot 2}{3}$$

und

$$\operatorname{res}_2(F^*(z) \cdot z^{n-1}) = \frac{2^n \cdot (2-1)}{2+1} = \frac{2^n}{3}$$

berechnen lassen. Die Folgenglieder erhalten wird dann als

$$f_n = \operatorname{res}_{-1}(F^*(z) \cdot z^{n-1}) + \operatorname{res}_2(F^*(z) \cdot z^{n-1}) = \frac{(-1)^n \cdot 2 + 2^n}{3}.$$

Definition 9.7

Es seien $(f_n) = (f_n)_{n \geq 0}$ und $(g_n) = (g_n)_{n \geq 0}$ zwei Folgen in \mathbb{C} .

- a. Wir bezeichnen mit $(f_{n-k}) = (f_{n-k})_{n \geq 0}$ die Folge mit den Folgengliedern

$$\underbrace{0, \dots, 0}_k, f_0, f_1, f_2, \dots$$

und mit $(f_{n+k}) = (f_{n+k})_{n \geq 0}$ die Folge mit den Folgengliedern

$$f_k, f_{k+1}, f_{k+2}, f_{k+3}, \dots$$

- b. Für $n \geq 0$ setzen wir

$$\Delta^0 f_n = f_n$$

und rekursiv für $k \geq 1$ dann

$$\Delta^k f_n = \Delta^{k-1} f_{n+1} - \Delta^{k-1} f_n,$$

und wir nennen die Folge

$$(\Delta^k f_n)_{n \geq 0}$$

die *Differenz k-ter Ordnung* von $(f_n)_{n \geq 0}$. Statt $\Delta^1 f_n$ schreibt man oft der Einfachheit halber auch Δf_n , und dann gilt

$$\Delta^k f_n = \Delta(\Delta^{k-1} f_n).$$

Die Differenzen haben für Folgen eine Bedeutung die der Differentiation bei Funktionen analog ist.

c. Wir definieren die *Faltung* der Folgen (f_n) und (g_n) als

$$(f_n) * (g_n) = \left(\sum_{j=0}^n f_j \cdot g_{n-j} \right)_{n \geq 0}.$$

Damit ist die Faltung der beiden Folgen gerade das Cauchy-Produkt der durch die Folgen definierten Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$.

Satz 9.8 (Rechenregeln für die Z-Transformation)

Es seien $(f_n)_{n \geq 0}$ und $(g_n)_{n \geq 0}$ zwei komplexe Zahlenfolgen und es seien $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Dann gelten die folgenden Rechenregeln:

1) **Linearität:**

$$\mathcal{Z}(\lambda f_n + \mu g_n) = \lambda \mathcal{Z}(f_n) + \mu \mathcal{Z}(g_n).$$

2) **Dämpfungssatz:** Für $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ gilt

$$\mathcal{Z}(\lambda^n \cdot f_n) = \mathcal{Z}(f_n) \left(\frac{z}{\lambda} \right) = F^* \left(\frac{z}{\lambda} \right).$$

3) **Verschiebungssätze:** Für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathcal{Z}(f_{n-k}) = z^{-k} \cdot \mathcal{Z}(f_n)$$

und

$$\mathcal{Z}(f_{n+k}) = z^k \cdot \left(\mathcal{Z}(f_n) - \sum_{j=0}^{k-1} f_j \cdot z^{-j} \right).$$

4) **Summationssatz:**

$$\mathcal{Z} \left(\left(\sum_{j=0}^{n-1} f_j \right)_n \right) = \frac{\mathcal{Z}(f_n)}{z-1}.$$

5) **Differenzenbildung vor der Transformation:** Für $k \geq 0$ gilt

$$\mathcal{Z}(\Delta^k f_n) = (z-1)^k \cdot \mathcal{Z}(f_n) - z \cdot \sum_{j=0}^{k-1} (z-1)^{k-1-j} \cdot \Delta^j f_0.$$

Insbesondere erhalten wir

$$\mathcal{Z}(\Delta f_n) = (z-1) \cdot \mathcal{Z}(f_n) - z f_0.$$

6) **Differentiation nach der Transformation:** $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathcal{Z}(n \cdot f_n) = -z \cdot \frac{\partial \mathcal{Z}(f_n)}{\partial z}.$$

7) **Faltungssatz:** Für $s > a$ gilt

$$\mathcal{Z}((f_n) * (g_n)) = (\mathcal{Z}f) \cdot (\mathcal{Z}g).$$

Beweis: Die Linearität, die Verschiebungssätze sowie die Dämpfung folgen unmittelbar aus der Definition der \mathcal{Z} -Transformierten. Die Summationsformel ergibt sich aus dem Faltungssatz durch Faltung von (f_n) mit der konstanten Folge $(g_n) = (1)$. Der Faltungssatz selbst folgt aus der Formel des Cauchy-Produktes für Reihen. Für die Differenzenbildung beachtet man, daß

$$\mathcal{Z}(\Delta f_n) = \mathcal{Z}(f_{n+1}) - \mathcal{Z}(f_n) = z \cdot (\mathcal{Z}(f_n) - f_0) - \mathcal{Z}(f_n) = (z-1) \cdot \mathcal{Z}(f_n) - z f_0$$

aus der Linearität und dem zweiten Verschiebungssatz folgt. Für Differenzen höherer Ordnung wendet man Induktion an. Die Formel der Differentiation nach der Transformation sieht man leicht, indem man $\mathcal{Z}(f_n)$ formal ableitet. \square

Beispiel 9.9

a. Aus der Gleichung

$$\cos(\omega n) = \frac{e^{i\omega n} - e^{-i\omega n}}{2}$$

können wir mit Hilfe der Linearität der \mathcal{Z} -Transformierten und mit Beispiel 9.4 die \mathcal{Z} -Transformierte

$$\mathcal{Z}(\cos(\omega n)) = \frac{\mathcal{Z}(e^{i\omega n}) + \mathcal{Z}(e^{-i\omega n})}{2} = \frac{\frac{z}{z-e^{i\omega}} + \frac{z}{z-e^{-i\omega}}}{2} = \frac{z^2 - \cos(\omega) \cdot z}{z^2 - 2\cos(\omega) \cdot z + 1}$$

der Folge $(\cos(\omega n))_{n \geq 0}$ berechnen. Sie hat Konvergenzradius $r = |e^{i\omega}| = 1$.

b. Die Folge $(f_n)_{n \geq 0}$ mit $f_n = n$ für alle $n \geq 0$ hat eine sehr einfache Differenzenfolge

$$\Delta f_n = 1$$

für $n \geq 0$. Löst man die Formel der Differenzenbildung in Satz 9.8 nach $\mathcal{Z}(f_n)$ auf, so erhält man unter Beachtung von Beispiel 9.4

$$\mathcal{Z}(f_n) = \frac{\mathcal{Z}(\Delta f_n)}{(z-1)} + \frac{z}{z-1} \cdot f_0 = \frac{\frac{z}{z-1}}{z-1} + \frac{z}{z-1} \cdot 0 = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

Der Konvergenzradius ist wieder $r = 1$.

c. Mit der Regel für die Differentiation nach der Transformation erhält man dann

$$\mathcal{Z}(n^2) = \mathcal{Z}(n \cdot n) = -z \cdot \frac{\partial}{\partial z} \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z \cdot (z+1)}{(z-1)^3}.$$

Der Konvergenzradius ist wieder $r = 1$.

Bemerkung 9.10 (Liste von wichtigen Z-Transformierten)

Wir geben hier der Übersicht halber eine Liste wichtiger Laplacetransformierter an:

f_n	$\mathcal{Z}(f_n)$	f_n	$\mathcal{Z}(f_n)$
$f_n = 0, n \geq 1$	f_0	1	$\frac{z}{z-1}$
$(-1)^n$	$\frac{z}{z+1}$	n	$\frac{z}{(z-1)^2}$
n^2	$\frac{z \cdot (z+1)}{(z-1)^3}$	n^m	$\frac{p(z)}{(z-1)^{m+1}}, \deg(p) = m$
c^{n-1}	$\frac{1}{z-c}$	c^n	$\frac{z}{z-c}$
$\binom{n}{k}$	$\frac{z}{(z-1)^k}$	$\frac{c^n}{n!}$	$\exp\left(\frac{c}{z}\right)$
$c^n \cdot \sin(\omega n)$	$\frac{cz \cdot \sin(\omega)}{z^2 - 2cc\cos(\omega) + c^2}$	$c^n \cdot \cos(\omega n)$	$\frac{z \cdot (z - c \cdot \cos(\omega))}{z^2 - 2cc\cos(\omega) + c^2}$
$c^n \cdot \sinh(\omega n)$	$\frac{cz \cdot \sinh(\omega)}{z^2 - 2cc\cosh(\omega) + c^2}$	$c^n \cdot \cosh(\omega n)$	$\frac{z \cdot (z - c \cdot \cosh(\omega))}{z^2 - 2cc\cosh(\omega) + c^2}$
$f_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$	$f_0 + \ln\left(1 + \frac{1}{z}\right)$	$f_n = \frac{c^{n-1}}{n}$	$f_0 + \frac{1}{c} \cdot \ln\left(\frac{z}{z-c}\right)$

Beispiel 9.11 (Anwendung auf ein Netzwerk aus T-Vierpolen)

Ein *Kettenleiter* ist ein Netzwerk aus in Serie geschalteten identischen T-Vierpolen, wie z.B. in Abbildung 14. Wir wollen hier den Kettenleiter in Abbildung 15 unter-

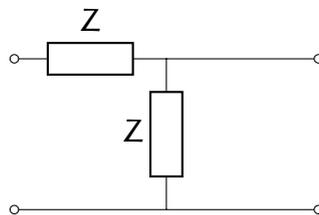


ABBILDUNG 14. Ein T-Vierpol mit zwei komplexen Widerständen Z

suchen, bei dem die T-Vierpole je zwei identische komplexe Widerstände Z haben. Wir gehen davon aus, daß der komplexe Spannungsabfall an den Widerständen der

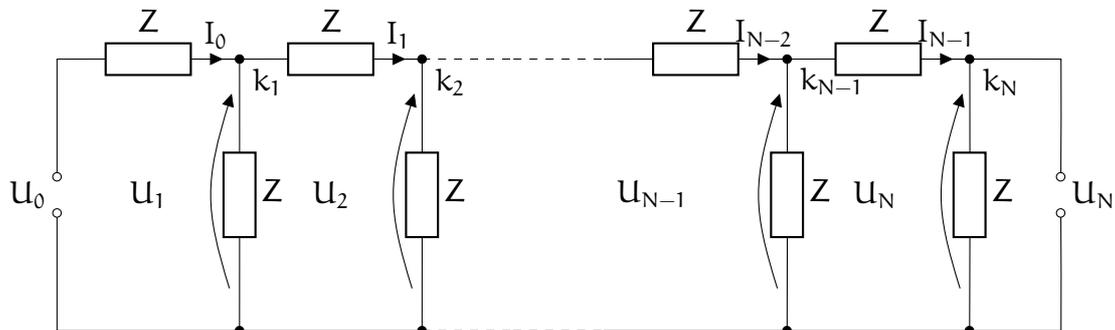


ABBILDUNG 15. Ein Kettenleiter

n -ten senkrechten Kante U_n beträgt und daß die komplexe Stromstärke, die auf der Horizontalen in den Knoten k_n fließt, den Wert I_{n-1} hat.

Aus dem 1. Kirchhoffschen Gesetz erhalten wir für die Stromstärke, die senkrecht nach oben in den Knoten k_{n+1} fließt, dann den Wert

$$I_{n+1} - I_n.$$

Damit erhalten wir aus dem Ohmschen Gesetz an dem n -ten senkrechten Widerstand die Gleichung

$$(I_{n+1} - I_n) \cdot Z = U_{n+1}. \quad (13)$$

Aus dem 2. Kirchhoffschen Gesetz erhalten wir für den Spannungsabfall am waagerechten Widerstand vor dem Knoten k_{n+1} den Wert

$$U_{n+1} - U_n$$

und aus dem Ohmschen Gesetz erhalten wir dort dann die Gleichung

$$I_n \cdot Z = U_{n+1} - U_n. \quad (14)$$

Setzen wir Gleichung (14) für n und für $n + 1$ in Gleichung (13) ein, so erhalten wir die Gleichung

$$(U_{n+2} - U_{n+1}) - (U_{n+1} - U_n) = U_{n+1}$$

und damit die Gleichung

$$U_{n+2} - 3 \cdot U_{n+1} + U_n = 0 \quad (15)$$

für $n \geq 1$. Dies ist eine Rekursionsvorschrift, aus der sich alle Werte U_n berechnen lassen, wenn wir die Startwerte U_0 und

$$U_1 = U_0 - Z \cdot I_0$$

kennen, d.h. wenn wir die Eingangsspannung U_0 und die Eingangsstromstärke I_0 vorgeben.

In Analogie zu den Differentialgleichungen bei Funktionen können wir die Rekursionsgleichung 15 auch als *Differenzgleichung* schreiben. Wegen

$$\begin{aligned} U_{n+2} - 3 \cdot U_{n+1} + U_n &= (U_{n+2} - U_{n+1}) - 2 \cdot (U_{n+1} - U_n) - U_n \\ &= \Delta U_{n+1} - 2 \cdot \Delta U_n - U_n \\ &= (\Delta U_{n+1} - \Delta U_n) - \Delta U_n - U_n \\ &= \Delta^2 U_n - \Delta U_n - U_n \end{aligned}$$

läßt sich (15) als *lineare Differenzgleichung 2. Ordnung* schreiben:

$$\Delta^2 U_n - \Delta U_n - U_n = 0.$$

Die Vorgabe der Werte U_0 und U_1 liefert uns dann ein *Anfangswertproblem*.

Wir wollen nun mit Hilfe der \mathcal{Z} -Transformation aus der Rekursionsgleichung (15) eine explizite Darstellung der Folge herleiten und damit das obige Anfangswertproblem lösen. Wenden wir den \mathcal{Z} -Operator an und berücksichtigen wir dabei den Verschiebungssatz, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{Z}(u_{n+2}) - 3 \cdot \mathcal{Z}(u_{n+1}) + \mathcal{Z}(u_n) \\ &= (z^2 \cdot \mathcal{Z}(u_n) - z \cdot u_1 - z^2 \cdot u_0) - 3 \cdot (z \cdot \mathcal{Z}(u_n) - z \cdot u_0) + \mathcal{Z}(u_n) \\ &= (z^2 - 3z + 1) \cdot \mathcal{Z}(u_n) - (u_0 \cdot z^2 + (u_1 - 3 \cdot u_0) \cdot z). \end{aligned}$$

Lösen wir die Gleichung nach $\mathcal{Z}(u_n)$ auf, so erhalten wir

$$\mathcal{Z}(u_n) = \frac{u_0 \cdot z^2 + (u_1 - 3 \cdot u_0) \cdot z}{z^2 - 3z + 1}.$$

Um die Rücktransformation besser durchführen zu können, zerlegen wir die rechte Seite mit Hilfe von Partialbruchzerlegung, wobei wir

$$z^2 - 3z + 1 = (z - z_1) \cdot (z - z_2)$$

mit

$$z_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

und

$$z_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

beachten. Der Ansatz

$$\mathcal{Z}(u_n) = \frac{u_0 \cdot z^2 + (u_1 - 3 \cdot u_0) \cdot z}{z^2 - 3z + 1} = \frac{Az}{z - z_1} + \frac{Bz}{z - z_2}$$

führt zum Gleichungssystem

$$(A + B) \cdot z^2 - (Az_2 + Bz_1) \cdot z = u_0 \cdot z^2 + (u_1 - 3 \cdot u_0) \cdot z$$

und damit zu

$$A = \frac{u_1 - u_0 z_2}{\sqrt{5}}$$

und

$$B = \frac{u_0 z_1 - u_1}{\sqrt{5}}.$$

Aus Beispiel 9.4 wissen wir, daß

$$\mathcal{Z}(u_n) = A \cdot \frac{z}{z - z_1} + B \cdot \frac{z}{z - z_2} = A \cdot \mathcal{Z}(z_1^n) + B \cdot \mathcal{Z}(z_2^n) = \mathcal{Z}(A \cdot z_1^n + B \cdot z_2^n)$$

und somit

$$u_n = A \cdot z_1^n + B \cdot z_2^n \quad (16)$$

oder ganz konkret

$$u_n = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2 \cdot \sqrt{5}} \cdot u_0 - \frac{z}{\sqrt{5}} \cdot I_0 \right) \cdot \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2 \cdot \sqrt{5}} \cdot u_0 + \frac{z}{\sqrt{5}} \cdot I_0 \right) \cdot \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Damit ist das Anfangswertproblem gelöst und wir haben insbesondere die Ausgangsspannung u_N in Abhängigkeit von u_0 und I_0 berechnet.

Statt eines Anfangswertproblems kann man auch ein *Randwertproblem* betrachten. Denkt man sich den Kettenleiter in Abbildung 15 unendlich fortgesetzt und gibt sich neben der Eingangsspannung U_0 die Bedingung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$$

als zweiten Randwert vor, so führt der gleiche Ansatz zunächst wieder zur Lösung (16), in der aber U_1 jetzt zunächst unbekannt ist. Wegen $|z_1| > 1$ und $|z_2| < 1$ erzwingt unsere zweite Randbedingung dann

$$0 = A = \frac{U_1 - U_0 z_2}{\sqrt{5}}$$

und damit

$$U_1 = U_0 z_2.$$

Damit folgt dann

$$B = \frac{U_0 z_1 - U_1}{\sqrt{5}} = \frac{U_0 \cdot (z_1 - z_2)}{\sqrt{5}} = U_0,$$

und die Lösung (16) hat also die einfachere Form

$$U_n = U_0 \cdot z_2^n = U_0 \cdot \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Anhang

§ 10 Der Körper der komplexen Zahlen

Warum reichen die reellen Zahlen nicht aus, wozu braucht man die komplexen Zahlen? Die komplexen Zahlen werden zunächst eingeführt, um einen Mangel der reellen Zahlen zu beheben. Hierbei geht es um das Lösen von quadratischen Gleichungen. Es ist bekannt, daß das Quadrat einer reellen Zahl stets nicht-negativ ist. Also kann es keine reelle Zahl z geben, die die Gleichung $z^2 = -1$ löst.

Als Lösung genau dieser Gleichung wird nun eine neue Größe eingeführt, die *imaginäre Einheit* i . Definitionsgemäß ist sie diejenige Zahl, für die $i^2 = -1$ gilt. Wenn man nun eine solche Größe i einführt, dann ist damit alleine gar nichts gewonnen. Man will ja mit i auch rechnen können, und zwar will man möglichst alle Rechenregeln von \mathbb{R} übertragen. Man will nicht nur $i^2 = i \cdot i$, sondern auch $i+i$ oder Ausdrücke wie $37+42i$ bilden können. Dabei sollen die so zu konstruierenden *komplexen Zahlen* die reellen Zahlen als Teilmenge enthalten.

Daß es wirklich ein solches Zahlensystem komplexer Zahlen, in der Sprache der Algebra *den Körper der komplexen Zahlen*, gibt, ist nicht offensichtlich. Er wurde historisch erst recht spät gefunden und akzeptiert.¹ Gauß hat die Zahlen geometrisch, als Punkte in der Ebene, eingeführt, weshalb die komplexen Zahlen heute noch *Gaußsche Zahlenebene* heißen. Wir führen die komplexen Zahlen ebenfalls als reelle Zahlenpaare ein, definieren die Addition und die Multiplikation aber algebraisch und werden die Definitionen erst im Anschluß daran geometrisch interpretieren.

Bemerkung 10.1 (Konstruktion der komplexen Zahlen)

Es ist unser erklärtes Ziel, auf der reellen Zahlenebene \mathbb{R}^2 mit der Vektoraddition

$$(x, y) + (u, v) := (x + u, y + v)$$

eine *Multiplikation* zu definieren, so daß einerseits die üblichen Rechenregeln (Assoziativgesetze, Kommutativgesetze und Distributivgesetze) gelten und daß außerdem der Vektor

$$i := (0, 1)$$

eine Lösung der Gleichung

$$z^2 = -1$$

¹Erstmals tauchte $\sqrt{-1}$ wohl um 1540 bei Cardano auf. Wirklich als Zahlensystem wurden die komplexen Zahlen aber erst durch Gauß, 1777-1855, etabliert. Hierzu und zu vielen weiteren interessanten Tatsachen um die komplexen Zahlen vgl. [Ebb92] § 3.

ist. Um letzteres richtig zu interpretieren, denken wir uns die reelle Zahlengerade \mathbb{R} als Teilmenge von \mathbb{R}^2 , indem wir sie mit der x -Achse identifizieren, d.h.

$$\mathbb{R} \cong \{(\mathbf{a}, 0) \mid \mathbf{a} \in \mathbb{R}\} = x\text{-Achse.}$$

Die Multiplikation soll also der Bedingung

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) \cong -1$$

genügen. Außerdem würden wir uns sicher wünschen, daß die Multiplikation eines Vektors mit der reellen Zahl

$$\mathbf{a} \cong (\mathbf{a}, 0)$$

wie die Skalarmultiplikation des Vektors mit \mathbf{a} funktioniert, d.h.

$$(\mathbf{a}, 0) \cdot (x, y) \cong \mathbf{a} \cdot (x, y) = (ax, ay).$$

Wenn eine Multiplikation diese Wunschliste erfüllt, so gilt offenbar:

$$\begin{aligned} (x, y) \cdot (u, v) &= ((x, 0) + (0, y)) \cdot ((u, 0) + (0, v)) \\ &= ((x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1)) \cdot ((u, 0) + (v, 0) \cdot (0, 1)) \\ &= (x, 0) \cdot (u, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1) \cdot (u, 0) + (x, 0) \cdot (v, 0) \cdot (0, 1) \\ &\quad + (y, 0) \cdot (0, 1) \cdot (v, 0) \cdot (0, 1) \\ &= (xu, 0) + (yu, 0) \cdot (0, 1) + (xv, 0) \cdot (0, 1) + (yv, 0) \cdot (0, 1) \cdot (0, 1) \\ &= (xu, 0) + (yu, 0) \cdot (0, 1) + (xv, 0) \cdot (0, 1) + (yv, 0) \cdot (-1, 0) \\ &= (xu, 0) + (0, yu) + (0, xv) + (-yv, 0) \\ &= (xu - yv, xv + yu). \end{aligned}$$

Wir haben für die Definition der Multiplikation also nur *eine einzige* Möglichkeit, und die funktioniert zum Glück auch.

Satz 10.2 (Der Körper der komplexen Zahlen)

Definieren wir auf der reellen Zahlenebene $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2$ eine Addition durch

$$(x, y) + (u, v) := (x + u, y + v)$$

und eine Multiplikation durch

$$(x, y) \cdot (u, v) := (xu - yv, xv + yu)$$

für $(x, y), (u, v) \in \mathbb{C}$, so ist die Menge \mathbb{C} zusammen mit diesen beiden Operationen ein Körper, den wir den Körper der komplexen Zahlen nennen.

Bemerkung 10.3

Daß \mathbb{C} mit den beiden Operationen ein Körper ist, bedeutet, daß die oben erwähnten üblichen Rechenregeln bezüglich der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division gelten, so wie wir sie von den reellen Zahlen her kennen. Man beachte dabei,

daß die reelle Zahl $0 \hat{=} (0, 0)$ bei der Addition nichts tut und die reelle Zahl $1 \hat{=} (1, 0)$ bei der Multiplikation ohne Wirkung ist:

$$(x, y) + (0, 0) = (x + 0, y + 0) = (x, y)$$

und

$$(x, y) \cdot (1, 0) = (x \cdot 1 - y \cdot 0, x \cdot 0 + y \cdot 1) = (x, y).$$

Das multiplikative Inverse der Zahl $(0, 0) \neq (x, y) \in \mathbb{C}$ ist

$$(x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right).$$

Praktischer als das Rechnen mit Paaren von Zahlen ist die folgende Notation für komplexe Zahlen. Wir setzen $x := (x, 0)$ für $x \in \mathbb{R}$ und $i := (0, 1)$. Dann gilt für $z = (x, y) \in \mathbb{C}$

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) \hat{=} x + iy.$$

Diese Schreibweise wollen wir künftig für komplexe Zahlen verwenden.

Definition 10.4 (Die komplexe Konjugation)

a. Wir definieren die *Betragsfunktion* auf \mathbb{C} durch

$$|\cdot| : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : x + iy \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}.$$

b. Wir definieren die *komplexe Konjugation* als

$$\bar{\cdot} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z = x + iy \mapsto \bar{z} := x - iy.$$

Für $z \in \mathbb{C}$ heißt \bar{z} die zu z *konjugiert komplexe Zahl*.

c. Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ heißt $\operatorname{Re}(z) := x$ der Realteil von z und $\operatorname{Im}(z) := y$ der Imaginärteil von z .

Bemerkung 10.5

Man beachte, daß die Betragsfunktion auf \mathbb{C} die Betragsfunktion auf \mathbb{R} fortsetzt, da für eine reelle Zahl x stets $\sqrt{x^2} = |x|$ gilt.

Lemma 10.6 (Einfache Rechenregeln in \mathbb{C})

Es seien $z, w \in \mathbb{C}$ zwei komplexe Zahlen.

$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{ z ^2}$ für $z \neq 0$	$z \cdot \bar{z} = z ^2$
Der Betrag ist multiplikativ.	$ z \cdot w = z \cdot w .$
Dreiecksungleichung	$ z + w \leq z + w .$
Definitheit des Betrags	$ z = 0 \iff z = 0.$
Die Konjugation ist additiv und multiplikativ.	$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ und $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}.$

$\bar{\bar{z}} = z$	$\bar{z} = z \iff z \in \mathbb{R}$
$\operatorname{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2} \leq z $	$\operatorname{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i} \leq z $
$ z = \bar{z} $	

Beweis: Wir wollen die Dreiecksungleichung unter Verwendung der übrigen Aussagen zeigen und überlassen den Beweis dieser dem Leser als eine einfache Übungsaufgabe. Seien also $z, w \in \mathbb{C}$ gegeben. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 |z + w|^2 &= (z + w) \cdot \overline{(z + w)} \\
 &= z \cdot \bar{z} + (z \cdot \bar{w} + \bar{z} \cdot w) + w \cdot \bar{w} \\
 &= |z|^2 + (z \cdot \bar{w} + \overline{z \cdot \bar{w}}) + |w|^2 \\
 &= |z|^2 + 2 \cdot \operatorname{Re}(z \cdot \bar{w}) + |w|^2 \\
 &\leq |z|^2 + 2 \cdot |z \cdot \bar{w}| + |w|^2 \\
 &= |z|^2 + 2 \cdot |z| \cdot |\bar{w}| + |w|^2 \\
 &= |z|^2 + 2 \cdot |z| \cdot |w| + |w|^2 \\
 &= (|z| + |w|)^2.
 \end{aligned}$$

Da dies eine Ungleichung von nicht-negativen Zahlen in den reellen Zahlen ist, folgt

$$|z + w| \leq |z| + |w|.$$

□

Beispiel 10.7

- a. Wir betrachten die komplexe Zahl

$$z = i - 1 = -1 + i.$$

Dann gilt $\operatorname{Re}(z) = -1$, $\operatorname{Im}(z) = 1$ und $\bar{z} = -1 - i = -(1 + i)$. Für den Betrag von z rechnen wir

$$|z| = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

und damit erhalten wir das Inverse von z als

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{-1 - i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

- b. Gegeben seien $z = 3 + 2i$ und $w = 5 - i$. Dann gelten

$$z \cdot w = (3 \cdot 5 - 2 \cdot (-1)) + (3 \cdot (-1) + 2 \cdot 5) \cdot i = 17 + 7i$$

sowie

$$|w| = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{z}{w} &= z \cdot \frac{\bar{w}}{|w|^2} = (3 + 2i) \cdot \left(\frac{5}{26} + \frac{1}{26} \cdot i \right) \\ &= \left(3 \cdot \frac{5}{26} - 2 \cdot \frac{1}{26} \right) + \left(3 \cdot \frac{1}{26} + 2 \cdot \frac{5}{26} \right) \cdot i \\ &= \frac{13}{26} + \frac{13}{26} \cdot i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot i.\end{aligned}$$

c. Für die komplexen Zahlen $z = 3 + 4i$ und $w = 5 - 12i$ gilt

$$z + w = (3 + 5) + (4 - 12) \cdot i = 8 - 8i$$

und somit

$$\begin{aligned}|z + w| &= \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{2} \cdot 8 < 16 < 18 = 5 + 13 \\ &= \sqrt{25} + \sqrt{169} = \sqrt{3^2 + 4^2} + \sqrt{5^2 + 12^2} = |z| + |w|.\end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{(3 + 4i) + (3 - 4i)}{2} = \frac{6}{2} = 3 = \operatorname{Re}(z).$$

Bemerkung 10.8 (Geometrische Deutung der Addition und des Betrags)

Die Addition ist einfach die komponentenweise Addition, also die Addition der Vektoren, und die Dreiecksungleichung besagt deshalb im wesentlichen, daß in einem Dreieck die Summe der Seitenlängen von zwei Seiten stets eine obere Schranke für die Seitenlänge der dritten Seite ist.

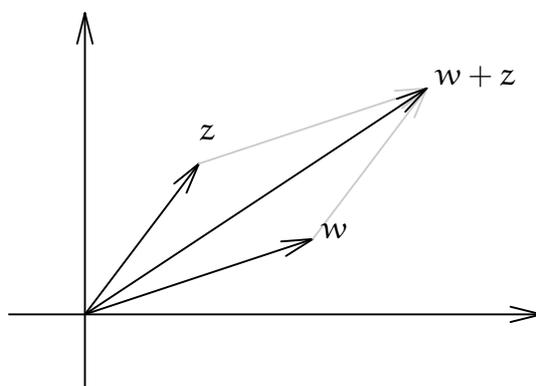


ABBILDUNG 16. Addition in \mathbb{C} als Vektoraddition

Der Absolutbetrag einer komplexen Zahl ist nach dem Satz von Pythagoras gerade die Länge des zugehörigen Vektors (siehe Abbildung 17). Die komplexen Zahlen vom Betrag 1 sind mithin genau die Punkte auf dem Einheitskreis um den Ursprung.

Beachte auch, daß der Betrag von z mit der euklidischen Norm von z aufgefaßt als Vektor in \mathbb{R}^2 übereinstimmt. Diese Interpretation ist von Bedeutung, wenn wir über Konvergenz von Folgen oder Stetigkeit von Funktionen sprechen und dabei auf die Methoden der mehrdimensionalen reellen Analysis zurückgreifen wollen.

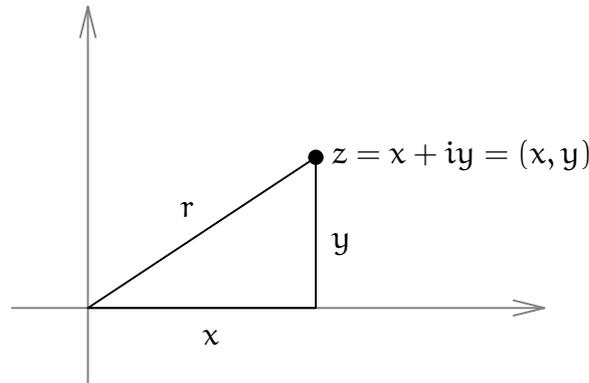


ABBILDUNG 17. Pythagoras: $x^2 + y^2 = r^2$

Bemerkung 10.9 (Polarkoordinaten und die Deutung der Multiplikation)

Zur geometrischen Interpretation der Multiplikation verwenden wir den Absolutbetrag $r := |z|$ einer komplexen Zahl z . Für $z \neq 0$ ist $z' := \frac{z}{|z|}$ normiert auf Länge eins, und es gilt

$$z = |z| \cdot z' = r \cdot z'.$$

D.h. z ist das Produkt eines Vektors von Länge eins mit einer nicht-negativen reellen Zahl. Dabei ist z' vollständig durch den Winkel $\alpha \in [-\pi, \pi)$ bestimmt, den z' mit der x -Achse einschließt, nämlich

$$z' = (\cos(\alpha), \sin(\alpha)) = \cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha).$$

Also ist jede komplexe Zahl $z \neq 0$ eindeutig durch ihren Betrag und den Winkel α bestimmt. Wir nennen

$$\arg(z) := \alpha = \begin{cases} \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}\right), & \text{wenn } \operatorname{Re}(z) > 0, \\ \pm\pi, & \text{wenn } \operatorname{Re}(z) = 0, \\ \pi + \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}\right), & \text{wenn } \operatorname{Re}(z) < 0 \end{cases}$$

das *Argument* von z und das Paar

$$(r, \alpha) = (|z|, \arg(z))$$

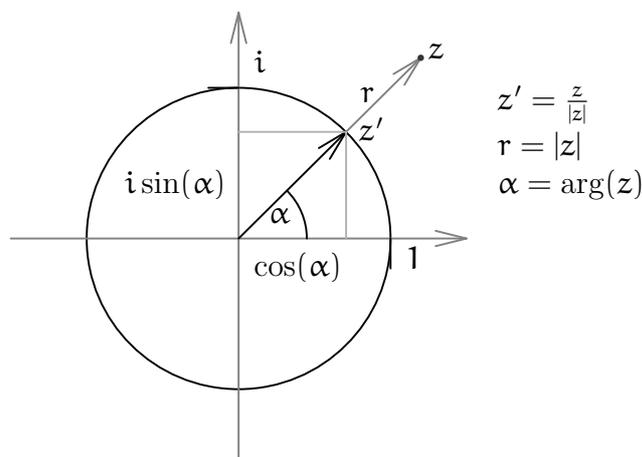
die *Polarkoordinaten* von z .

Wir erinnern hier an die beiden Additionstheoreme für den Sinus und den Cosinus:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \quad (17)$$

und

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta). \quad (18)$$

ABBILDUNG 18. Polarkoordinaten von $z = r \cdot (\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha))$

Betrachten wir zunächst die Multiplikation von zwei komplexen Zahlen $z = \cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha)$ und $w = \cos(\beta) + i \cdot \sin(\beta)$ vom Betrag 1:

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha)) \cdot (\cos(\beta) + i \cdot \sin(\beta)) \\ &= (\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)) + i \cdot (\cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta)) \\ &\stackrel{(17),(18)}{=} \cos(\alpha + \beta) + i \cdot \sin(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

Die beiden Zahlen werden also multipliziert, indem man die Argumente addiert.

Für das Produkt zweier beliebiger komplexer Zahlen $z = |z| \cdot (\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha))$ und $w = |w| \cdot (\cos(\beta) + i \cdot \sin(\beta))$ gilt dann analog

$$z \cdot w = |z| \cdot |w| \cdot (\cos(\alpha + \beta) + i \cdot \sin(\alpha + \beta)),$$

die Argumente werden addiert und die Beträge multipliziert (siehe Abbildung 19).

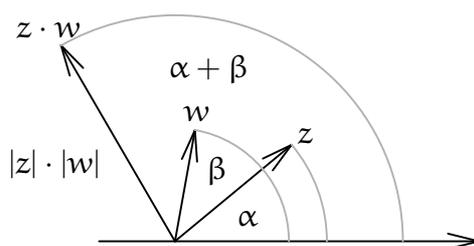


ABBILDUNG 19. Multiplikation zweier komplexer Zahlen

In Polarkoordinaten könnte man dies schreiben als

$$(r, \alpha) \cdot (s, \beta) = (r \cdot s, \alpha + \beta).$$

Beispiel 10.10

a. Zur Ermittlung von $\alpha = \arg(z)$ für $z = i - 1$ betrachten wir die Zahl

$$\frac{z}{|z|} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

vom Betrag 1, für die gilt

$$\frac{z}{|z|} = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha),$$

d.h. $\cos(\alpha) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ und $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, also $\alpha = \frac{3}{4}\pi$ (siehe Abbildung 20).

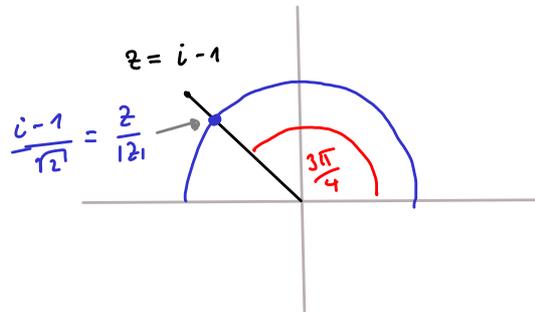


ABBILDUNG 20. $\frac{z}{|z|}$ für $z = i - 1$

b. Die Teilmenge

$$\begin{aligned} G &= \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = 1\} \\ &= \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y = -x + 1\} \end{aligned}$$

ist eine Gerade in der Zahlenebene mit Steigung -1 und y -Achsenabschnitt 1 (siehe Abbildung 21).

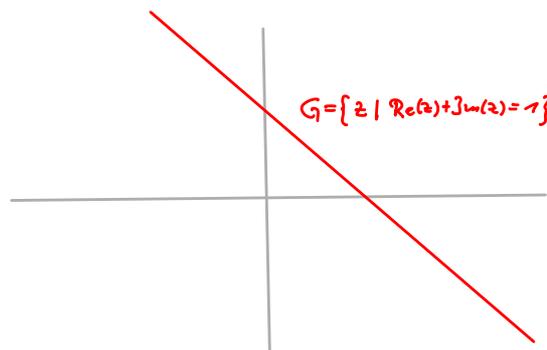


ABBILDUNG 21. $G = \{z \mid \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = 1\} = \{x + iy \mid y = -x + 1\}$

Bemerkung 10.11 (n-te Wurzeln)

Aus der Polarkoordinatendarstellung einer komplexen Zahl

$$w = r \cdot (\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha))$$

läßt sich leicht ableiten, daß die Zahl

$$\mathbf{a} = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos \left(\frac{\alpha}{n} \right) + i \cdot \sin \left(\frac{\alpha}{n} \right) \right)$$

eine n -te Wurzel aus w ist, d.h.

$$\mathbf{a}^n = w.$$

Dabei ist $\sqrt[n]{r}$ die eindeutig bestimmte nicht-negative n -te Wurzel der nicht-negativen Zahl r .

Die obige Zahl \mathbf{a} ist aber nicht die einzige Lösung der Gleichung

$$z^n = w$$

in \mathbb{C} . Denn addiert man zum Argument einen der folgenden Winkel

$$\frac{2\pi k}{n}, \quad \text{mit } k = 1, \dots, n-1,$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} \left(\sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos \left(\frac{\alpha+2\pi k}{n} \right) + i \cdot \sin \left(\frac{\alpha+2\pi k}{n} \right) \right) \right)^n &= \sqrt[n]{r}^n \cdot \left(\cos (\alpha + 2\pi k) + i \cdot \sin (\alpha + 2\pi k) \right) \\ &= \sqrt[n]{r}^n \cdot \left(\cos (\alpha) + i \cdot \sin (\alpha) \right) = w. \end{aligned}$$

Wir haben also in der Tat n verschiedene n -te Wurzeln von w gefunden:

$$\sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos \left(\frac{\alpha+2\pi \cdot k}{n} \right) + i \cdot \sin \left(\frac{\alpha+2\pi \cdot k}{n} \right) \right), \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Damit sehen wir, daß die Polynomgleichung

$$z^n = 1$$

in \mathbb{C} genau n Lösungen hat, wobei n der Grad der Gleichung ist. Das ist ein Spezialfall des Fundamentalsatzes der Algebra (siehe auch Korollar 12.6).

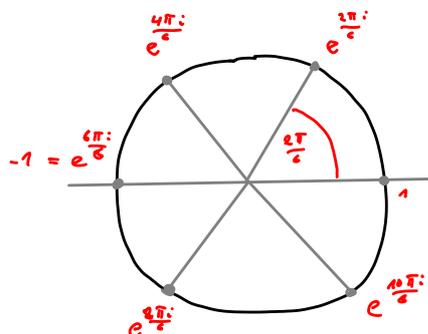


ABBILDUNG 22. Die sechsten Einheitswurzeln auf dem Einheitskreis

Aufgaben

Aufgabe 10.12

Bestimme für die folgenden komplexen Zahlen z den Realteil, den Imaginärteil, das Argument, den Betrag, das komplex Konjugierte und das multiplikative Inverse:

$$z = \frac{4i}{1+i} \quad \text{bzw.} \quad z = \frac{(2+2i)^7}{(1-i)^3} \quad \text{bzw.} \quad z = (1-i) \cdot e^{\frac{i \cdot 3 \cdot \pi}{2}}.$$

Aufgabe 10.13

Berechne für die komplexen Zahlen $z = 1 - i$ und $w = 1 + 3i$ die Zahl

$$\frac{z}{\bar{w} - z^2}$$

Aufgabe 10.14

Die Zahl $0 \neq z \in \mathbb{C}$ habe das Argument α und den Betrag r .

Bestimme $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$, \bar{z} , z^{-1} und z^n für $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 10.15

Skizziere in der komplexen Zahlenebene die Mengen

- $M_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Im}(z) > 0\}$
- $M_2 := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1, \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$
- $M_3 := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Im}(z) \geq 0, z \neq \frac{1}{2}i\}$
- $M_4 := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Im}(z) > 0\} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = 0, \operatorname{Im}(z) \leq \frac{1}{2}\}$
- $M_5 := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 5, |z + 1 + i| > 1\}$
- $M_6 := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq 0, \operatorname{Im}(z) \geq 0, \operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Im}(z) \leq 1\}$

Aufgabe 10.16

Bestimme für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ alle Quadratwurzeln aus der Zahl $\left(\frac{i-1}{i+1}\right)^n$.

§ 11 Topogische Grundbegriffe

In der eindimensionalen reellen Analysis waren die offenen und abgeschlossenen Intervalle die einzigen Teilmengen von \mathbb{R} , die als Definitionsbereich für Funktionen von Interesse waren. Die Zahlenebene bietet ein viel größeres Spektrum an interessanten Teilmengen. Um Analysis auf den komplexen Zahlen betreiben zu können, ist es deshalb nötig, daß wir topogische Grundbegriffe zur Verfügung haben, die sich alle aus dem Begriff des Abstands zweier Punkte in der Zahlenebene ergeben.

Definition 11.1 (Abstand und Kreisscheibe)

Für zwei komplexe Zahlen $w, z \in \mathbb{C}$ nennen wir die nicht-negative reelle Zahl $|z - w|$ den *Abstand* von w und z .

Ist $r > 0$ eine positive reelle Zahl, so ist die Menge

$$K_r(z) := \{w \in \mathbb{C} \mid |w - z| < r\}$$

aller Punkte in der Zahlenebene, deren Abstand zu z echt kleiner r ist, eine *offene Kreisscheibe* um z vom Radius r .

Beispiel 11.2

a. Die Teilmenge

$$K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1 - i| \leq 2\}$$

ist eine Kreisscheibe mit Mittelpunkt $i + 1 \hat{=} (1, 1)$ und Radius 2 (siehe Abbildung 23), da

$$|z - 1 - i| = |z - (1 + i)|$$

den Abstand des Punktes z in der Zahlenebene vom Punkt $1 + i$ mißt. Damit ist dann $K_2(1 + i)$ die Kreisscheibe K ohne den Kreisrand.

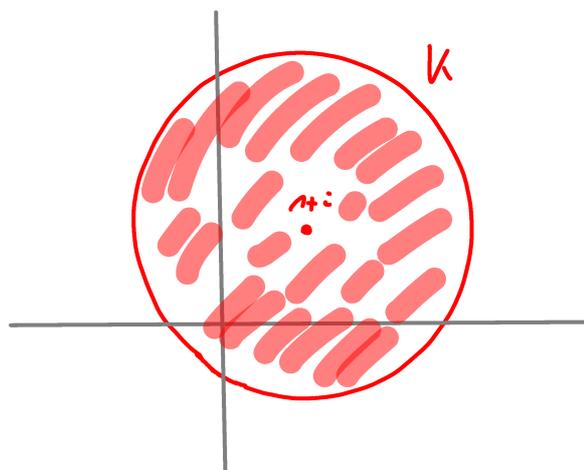


ABBILDUNG 23. Die abgeschlossene Kreisscheibe $K = \overline{K_2(1 + i)}$

b. Die Menge

$$E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| + |z + 1| \leq 3\}$$

ist die Menge der Punkte in der Ebene, für die die Summe der Abstände von $1 \triangleq (1, 0)$ und $-1 \triangleq (-1, 0)$ den Wert 3 hat. Damit ist E eine Ellipse mit den Brennpunkte 1 und -1 (siehe Abbildung 24).

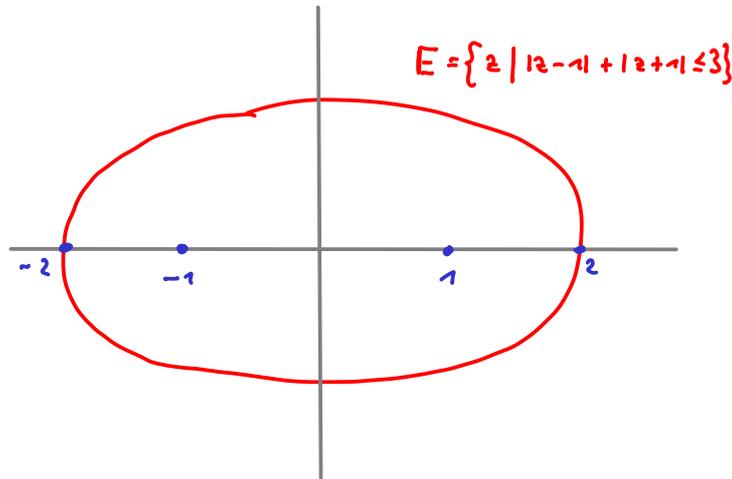


ABBILDUNG 24. Die Ellipse $E = \{z \mid |z - 1| + |z + 1| \leq 3\}$

Definition 11.3

Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ eine Teilmenge von \mathbb{C} .

- a. Ein Punkt $a \in \mathbb{C}$ heißt *Randpunkt* von D , wenn jede offene Kreisscheibe um a sowohl D , als auch das Komplement $\mathbb{C} \setminus D$ schneidet, d.h.

$$D \cap K_r(a) \neq \emptyset \neq (\mathbb{C} \setminus D) \cap K_r(a)$$

für alle $r > 0$ (siehe Abbildung 25).

- b. Die Menge ∂D der Randpunkte von D nennen wir den *Rand* von D .
- c. Die Menge $\bar{D} := D \cup \partial D$ heißt der *Abschluß* von D .
- d. D heißt *abgeschlossen*, wenn D mit dem Abschluß \bar{D} übereinstimmt, d.h. wenn der Rand von D schon in D enthalten ist.
- e. D heißt *offen*, wenn D keinen seiner Randpunkte enthält, d.h. wenn es für jeden Punkt $z \in D$ eine offene Kreisscheibe gibt, die ganz in D liegt.
- f. D heißt *beschränkt*, wenn D Teilmenge einer Kreisscheibe um 0 ist.
- g. D heißt *kompakt*, wenn D abgeschlossen und beschränkt ist.

Lemma 11.4

Eine Teilmenge D von \mathbb{C} ist genau dann abgeschlossen, wenn ihr Komplement $\mathbb{C} \setminus D$ offen ist.

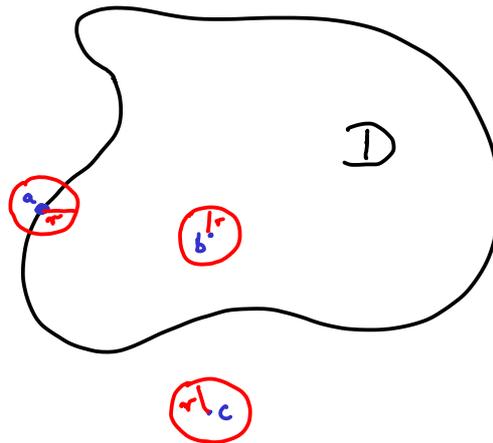


ABBILDUNG 25. a ist ein Randpunkt, b und c sind keine Randpunkte.

Beweis: Wenn der Rand von D nicht zu D gehört, so gibt es einen Randpunkt a von D im Komplement $C \setminus D$. Da jede Kreisscheibe um diesen auch D schneidet, liegt keine Kreisscheibe um a ganz in $C \setminus D$. Mithin ist $C \setminus D$ nicht offen und damit D nicht abgeschlossen.

Wenn aber jeder Randpunkt von D zu D gehört, so ist kein Punkt im Komplement $C \setminus D$ ein Randpunkt von D . Mithin gibt es um jeden Punkt im Komplement von D eine Kreisscheibe, die D nicht schneidet, also ganz im Komplement liegt. Damit ist $C \setminus D$ offen und somit D abgeschlossen. \square

Beispiel 11.5

- Offene Kreisscheiben sind offen. Rechtecke ohne Rand sind offen.
- Der Rand einer Kreisscheibe oder eines Rechtecks ist auch der Rand im topologischen Sinne (siehe Abbildung 26).

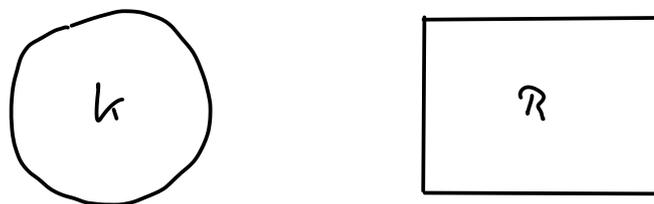


ABBILDUNG 26. Rand einer Kreisscheibe K und eines Rechtecks R

- Die leere Menge und C sind sowohl offen als auch abgeschlossen.
- Kreise und Rechtecke mit Rand sind kompakt.

- e. Die obere Halbebene ohne die x -Achse ist offen, die x -Achse ist ihr Rand. Der Abschluß ist mithin die obere Halbebene mit x -Achse. Diese Menge ist nicht kompakt.
- f. Die Ebene ohne die nicht-negativen reellen Punkte

$$\mathbb{C} \setminus \{z \mid \operatorname{Re}(z) \leq 0, \operatorname{Im}(z) = 0\} = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$$

nennen wir eine *geschlitzte Zahlenebene*. Diese ist offen.

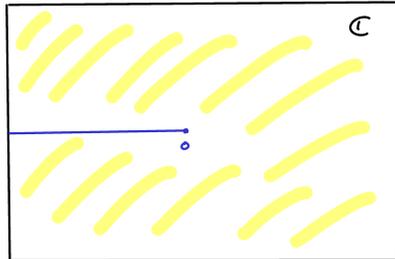


ABBILDUNG 27. Die geschlitzte Zahlenebene

- g. Die *punktierte Ebene* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist offen und ihr Rand ist $\partial(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = \{0\}$.

Beispiel 11.6

Die Menge

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| \leq 1, \operatorname{Im}(z) \geq \operatorname{Re}(z)\}$$

ist der Schnitt der abgeschlossenen Kreisscheibe um 1 mit Radius 1 mit der abgeschlossenen Halbebene oberhalb der Winkelhalbierenden (siehe Abbildung 28). Der Rand gehört zur Menge, so daß sie abgeschlossen ist. Sie ist zudem beschränkt und mithin kompakt.

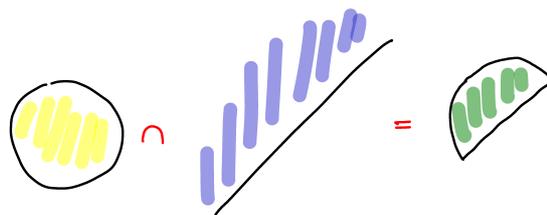


ABBILDUNG 28. Der Schnitt zweier abgeschlossener Mengen

Wie im Reellen ist der Begriff der Konvergenz von Zahlenfolgen die Grundlage der Analysis komplexer Funktionen.

Definition 11.7

Eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ komplexer Zahlen *konvergiert* gegen $z \in \mathbb{C}$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, so $|z_n - z| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon$. Wir schreiben dann $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ oder $z_n \rightarrow z$.

Für eine beliebig kleine Kreisscheibe $K_\varepsilon(z)$ um z gilt also, daß die Folgenglieder ab einem hinreichend großen Index N_ε alle in der Kreisscheibe liegen.

Lemma 11.8 (Konvergenz von Folgen ist komponentenweise Konvergenz.)

Eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ komplexer Zahlen konvergiert genau dann gegen $z \in \mathbb{C}$, wenn die Folge $(\operatorname{Re}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ der Realteile gegen den Realteil $\operatorname{Re}(z)$ von z konvergiert und die Folge $(\operatorname{Im}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ der Imaginärteile gegen den Imaginärteil $\operatorname{Im}(z)$ von z konvergiert.

Beweis: Für das Betragsquadrat des Abstands von z_n zu z gilt

$$|z_n - z|^2 = \operatorname{Re}(z_n - z)^2 + \operatorname{Im}(z_n - z)^2 = |\operatorname{Re}(z_n) - \operatorname{Re}(z)|^2 + |\operatorname{Im}(z_n) - \operatorname{Im}(z)|^2.$$

Da die rechte Seite eine Summe zweier nicht-negativer Zahlen ist, konvergiert die linke Seite genau dann gegen Null, wenn dies für die beiden Summanden auf der rechten Seite gilt. \square

Beispiel 11.9

Die Zahlenfolge $(z_n)_{n \geq 1}$ mit

$$z_n = \cos\left(\frac{1}{n}\right) + i \cdot \frac{3n^2}{2n^2 + 5n + 1}$$

ist konvergent mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 1 + i \cdot \frac{3}{2},$$

weil

$$\cos\left(\frac{1}{n}\right) \longrightarrow \cos(0) = 1$$

und

$$\frac{3n^2 + 1}{2n^2 + 5n + 1} = \frac{3}{2 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}} \longrightarrow \frac{3}{2 + 0 + 0} = \frac{3}{2}.$$

Bemerkung 11.10 (Grenzwertsätze)

Die üblichen Grenzwertsätze der Analysis für Folgen in \mathbb{R}^n gelten entsprechend dann auch für komplexe Zahlenfolgen.

Satz 11.11 (Folgenkriterium für Abgeschlossenheit)

Eine Teilmenge D von \mathbb{C} ist genau dann abgeschlossen, wenn der Grenzwert jeder Zahlenfolge in D , die in \mathbb{C} konvergiert, schon in D liegt.

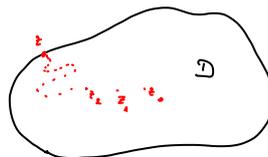


ABBILDUNG 29. Der Grenzwert z von $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ liegt in D

Beweis: Wir setzen zunächst voraus, daß D abgeschlossen ist. Nehmen wir an, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ mit $z_n \in D$ für alle n und daß $z \notin D$. Wegen $z_n \rightarrow z$, enthält jeder Kreis um z auch Punkte aus D , nämlich einige der z_n . Andererseits enthält jeder Kreis um z mit z auch einen Punkt aus dem Komplement. Mithin ist z ein Randpunkt von D . Da D abgeschlossen ist, ist dann aber $z \in D$ im Widerspruch zu unserer Annahme.

Setzen wir umgekehrt die Folgeeigenschaft voraus. Für jeden Randpunkt z von D können wir eine Folge von Punkten in D konstruieren, die gegen z konvergiert. Mithin ist jeder Randpunkt von D ein Punkt von D und D ist abgeschlossen. \square

Beispiel 11.12

Wir geben hier einige eher pathologische Beispiele von Mengen und ihren Abschlüssen, um zu zeigen, daß man mit diesen topologischen Begriffen durchaus vorsichtig umgehen muß, auch wenn sie sich bei den uns am meisten interessierenden Teilmengen von \mathbb{C} (z.B. Kreisscheiben, punktierten Kreisscheiben, geschlitzten Ebene, Rechtecken) so verhalten, wie das erwarten.

- Die Menge \mathbb{Z} ist eine abgeschlossene Teilmenge von \mathbb{C} , da eine konvergente Zahlenfolge ganzer Zahlen ab einem gewissen Folgenglied konstant sein muß.
- Die Menge \mathbb{Q} hingegen ist nicht abgeschlossen, da jede reelle Zahl Grenzwert einer Folge rationaler Zahlen ist. Der Abschluß von \mathbb{Q} in \mathbb{C} ist mithin die reelle Zahlenachse \mathbb{R} . Man beachte, daß der Abschluß von \mathbb{Q} damit zugleich der Rand von \mathbb{Q} ist:

$$\mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}} = \partial\mathbb{Q}.$$

- Die Menge

$$M = \left\{ x + i \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} \mid 0 < x \in \mathbb{R} \right\}$$

ist nicht abgeschlossen. Ihr Abschluß

$$\overline{M} = M \cup \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = 0\}$$

ist die Vereinigung von M mit der y -Achse, und hier stimmen Rand und Abschluß wieder überein (siehe Abbildung 30).

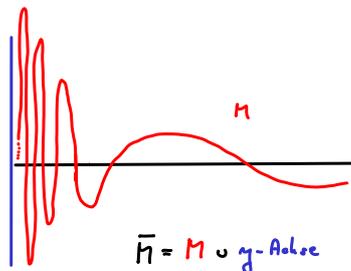


ABBILDUNG 30. $\overline{M} = M \cup y\text{-Achse}$

Definition 11.13

Sei D ein Teilmenge von \mathbb{C} .

- a. D heißt *sternförmig*, wenn es einen Punkt $w \in D$ gibt, so daß die Verbindungsstrecke zu jedem weiteren Punkt $z \in D$ ganz in D liegt (siehe Abbildung 31).

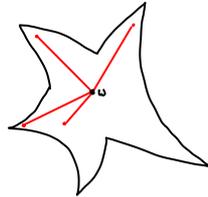


ABBILDUNG 31. Eine sternförmige Menge

- b. Eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ heißt ein *Weg* in \mathbb{C} von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$. Der Weg heißt *geschlossen*, wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$ gilt.
- c. D heißt *wegzusammenhängend*, wenn es für je zwei Punkte $w, z \in D$ einen Weg von w nach z gibt.
- d. D heißt ein *Gebiet*, wenn $D \neq \emptyset$, offen und wegzusammenhängend ist.

Gebiete sind in der Funktionentheorie die typischen Definitionsbereiche der komplexen Funktionen. Sie sind die Analoga zu den offenen Intervallen in der reellen Analysis.

Beispiel 11.14

- a. Die geschlitzte Ebene ist sternförmig mit 1 in der Rolle von w .

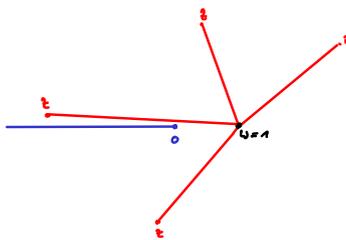


ABBILDUNG 32. Die geschlitzte Ebene ist sternförmig.

- b. Sternförmige Mengen sind wegzusammenhängend.
- c. Die punktierte Ebene $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist nicht sternförmig, sie ist aber wegzusammenhängend und damit ein Gebiet.
- d. Die Menge in Beispiel 11.6 ist sternförmig mit einem beliebigen Punkt in der Rolle von w .

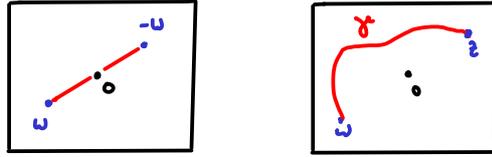


ABBILDUNG 33. Die punktierte Ebene ist nicht sternförmig, aber ein Gebiet.

Gebiete können Löcher enthalten, wie die punktierte Ebene. Wir wollen nun genauer fassen, was es heißt, daß ein Gebiet keine Löcher hat.

Definition 11.15

Wir nennen ein Gebiet D in \mathbb{C} *einfach zusammenhängend*, wenn es für jeden geschlossenen Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} : (s, t) \mapsto H(s, t)$$

gibt mit

$$H(0, t) = \gamma(t)$$

und

$$H(1, t) = \gamma(0)$$

für alle $t \in [0, 1]$.

H repräsentiert also eine Schar von Wegen, die mit dem Weg γ startet und diesen stetig zu dem konstanten Weg zusammenzieht, der sich vom Punkt $\gamma(0)$ nicht wegbewegt (siehe Abbildung 34).

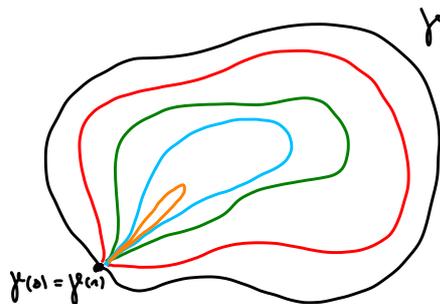


ABBILDUNG 34. Eine Schar von Wegen, die γ auf einen Punkt zusammenzieht.

Beispiel 11.16

- Kreise sind einfach zusammenhängend.
- Geschlitzte Ebenen sind einfach zusammenhängend.
- Allgemeiner sind sternförmige Mengen einfach zusammenhängend.
- Punktierte Ebenen sind nicht einfach zusammenhängend.

Aufgaben

Aufgabe 11.17

Überprüfe für jede der unten stehenden Mengen, welche der folgenden Eigenschaften sie erfüllt:

offen, abgeschlossen, konvex, wegzusammenhängend,
beschränkt, kompakt, Gebiet, einfach zusammenhängend.

Begründe die Antwort kurz.

- $M_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1, \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$
- $M_2 := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2, z \neq i\}$
- $M_3 := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Im}(z) > 0\} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = 0, \operatorname{Im}(z) \leq \frac{1}{2}\}$
- $M_4 := \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 5\}$
- $M_5 := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = 0, -1 \leq \operatorname{Im}(z) \leq 1\}$

Aufgabe 11.18

Bestimme den Rand der Mengen M_2 und M_4 in Aufgabe 11.17.

Aufgabe 11.19

Überprüfe die folgenden komplexen Zahlenfolgen $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf Konvergenz:

- a. $z_n = \frac{(3n+i) \cdot (n+i) - 5i \cdot (n^2-1)}{1+n+n^2}$.
- b. $z_n = \frac{\exp(i \cdot n)}{n}$.

§ 12 Anwendungen der Cauchyschen Integralformel

Wir werden in diesem Abschnitt einige wunderschöne und sehr wichtige Ergebnisse der Funktionentheorie kennenlernen, die sich alle unmittelbar aus der Cauchyschen Integralformel herleiten lassen.

A) Abschätzung der Taylorkoeffizienten

Korollar 12.1 (Abschätzung der Taylorkoeffizienten)

Es sei $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und f sei auf $\overline{K_\rho(z_0)} \subset D$ durch M beschränkt, dann gilt

$$|a_n| = \frac{|f^{(n)}(z_0)|}{n!} \leq \frac{M}{\rho^n}.$$

Beweis: Für den n -ten Koeffizienten der Taylorreihe erhalten wir aus (3) und Lemma 4.2

$$\begin{aligned} |a_n| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot l(\partial K_\rho(z_0)) \cdot \sup \left\{ \frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}} \mid z \in \partial K_\rho(z_0) \right\} \leq \frac{2\pi\rho M}{2\pi\rho^{n+1}} = \frac{M}{\rho^n}. \end{aligned}$$

□

B) Der Satz von Liouville

Der Sinus und der Cosinus sind Funktionen, die auf \mathbb{R} global durch eine Potenzreihe definiert und beschränkt sind. Sind sie auf \mathbb{C} auch beschränkt?

Korollar 12.2 (Satz von Liouville)

Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.

Beweis: Wegen des Potenzreihenentwicklungssatzes 5.6 ist die ganze Funktion f durch eine Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$$

um $z_0 = 0$ mit Konvergenzradius $r = \infty$ gegeben. Für $\rho \rightarrow \infty$ und $n \geq 1$ erhalten wir also aus Korollar 12.1

$$|a_n| \leq \frac{M}{\rho^n} \rightarrow 0$$

und damit

$$f(z) = a_0.$$

□

Beispiel 12.3

Der Cosinus ist nicht konstant und mithin wegen des Satzes von Liouville auch nicht beschränkt auf \mathbb{C} . In der Tat divergiert

$$\cos(it) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(it)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \geq \frac{t^2}{2}$$

für $t \rightarrow \infty$ offenbar bestimmt gegen ∞ .

C) Der Fundamentalsatz der Algebra

Wir wollen nun den in Bemerkung 10.11 angesprochenen Fundamentalsatz der Algebra herleiten. Man erhält ihn aus dem folgenden Korollar, indem man die Nullstellen sukzessive als Linearfaktoren mit Polynomdivision abspaltet.

Korollar 12.4 (Fundamentalsatz der Algebra)

Jede nicht-konstante Polynomfunktion über \mathbb{C} hat eine Nullstelle.

Beweis: Wenn $f = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ keine Nullstelle hat, dann ist die Funktion

$$\frac{1}{f} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

eine beschränkte ganze Funktion, da

$$\frac{1}{|f(z)|} = \frac{1}{|z|^n \cdot \left| a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right|} \longrightarrow 0$$

für $|z| \rightarrow \infty$. Wegen des Satzes von Liouville 12.2 ist sie dann aber konstant und mithin ist auch f konstant. \square

Bemerkung 12.5 (Polynomdivision)

Nullstellen einer Polynomfunktion kann man mit dem aus der Schule bekannten Verfahren der Polynomdivision als *Linearfaktoren* abspalten. Was das bedeutet, zeigen wir zunächst am Beispiel $f(z) = z^3 - 1$ mit der Nullstelle $z = 1$:

$$\begin{array}{r} (z^3 - 1) : (z - 1) = z^2 + z + 1. \\ \underline{z^3 - z^2} \\ z^2 - z \\ \underline{ z^2 - z} \\ z - 1 \\ \underline{ z - 1} \\ - \end{array}$$

Die Nullstelle $z = 1$ läßt sich also als Linearfaktor $z - 1$ abspalten:

$$f(z) = z^3 - 1 = (z - 1) \cdot (z^2 + z + 1).$$

Allgemein gilt, ist a eine Nullstelle der Polynomfunktion f vom Grad n , so gibt es eine Polynomfunktion g vom Grad $n - 1$, so daß

$$f(z) = (z - a) \cdot g(z)$$

für alle z gilt.

Ist $n - 1$ mindestens 1, so besitzt auch g nach dem Fundamentalsatz der Algebra wieder eine Nullstelle, die man als Linearfaktor abspalten kann. Führt man in dieser Weise fort, so kann man die Polynomfunktion f als Produkt von Linearfaktoren schreiben. Man erhält damit die folgende allgemeine Aussage des Fundamentalsatzes der Algebra.

Korollar 12.6 (Fundamentalsatz der Algebra)

Jede Polynomfunktion vom Grad $n \geq 1$ mit komplexen Koeffizienten läßt sich als Produkt von n Linearfaktoren schreiben.

Bemerkung 12.7

Die Aussage des Fundamentalsatzes ist eine reine Existenzaussage, d.h. der Satz garantiert uns, daß es die Nullstelle gibt. Er sagt uns im konkreten Beispiel überhaupt nichts darüber aus, wie wir sie finden können!

Das hat seinen guten Grund, es ist i.a. unmöglich, die Nullstellen exakt zu berechnen. Wir wollen uns die Situation für kleine Grade genauer anschauen.

Hat die Polynomfunktion Grad 1, ist also von der Form $f(z) = az + b$, so ist $z = -\frac{b}{a}$ die einzige Nullstelle von f . In diesem Fall können wir die Nullstelle also exakt angeben.

Hat die Polynomfunktion Grad 2, so ist sie von der Form

$$f(z) = az^2 + bz + c$$

und es gilt:

$$f(z) = 0 \iff z^2 + \frac{b}{a} \cdot z + \frac{c}{a} = 0.$$

Dieser Gleichung versuchen wir durch quadratische Ergänzung beizukommen:

$$0 = z^2 + \frac{b}{a} \cdot z + \frac{c}{a} = z^2 + \frac{b}{a} \cdot z + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right).$$

Dies können wir umformen zu:

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}.$$

Wir brauchen nun nur noch auf beiden Seiten die Quadratwurzeln zu ziehen und erhalten somit

$$z + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

und damit

$$z = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}. \quad (19)$$

Wir müssen also nur noch die Quadratwurzel aus $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$ berechnen und haben die beiden Nullstellen der Polynomfunktion gefunden. Wie man Quadratwurzeln berechnet, haben wir aber ganz am Ende von Bemerkung 10.9 gezeigt. Wir sind also

auch hier wieder in der Lage, die Nullstellen exakt auszurechnen. ... Ah, Vorsicht! Die schöne Formel

$$\sqrt{z} = \pm \sqrt{|z|} \cdot e^{i \cdot \frac{\arg(z)}{2}}$$

verschleiert ein wenig, daß wir i.a. weder die Quadratwurzel der reellen Zahl $|z|$ noch das Argument von z exakt bestimmen können! Schon die Nullstellen von Polynomfunktionen zweiten Grades kann man i.a. nur noch näherungsweise bestimmen, und die obige Formel (19) täuscht darüber ein wenig hinweg.

Bemerkung 12.8 (Rationale Nullstellen)

Die komplexen Zahlen sind toll, weil Polynomfunktionen stets Nullstellen in \mathbb{C} haben, aber man kann sie in aller Regel halt nicht exakt angeben. In gewisser Weise sind die rationalen Zahlen besser, was das betrifft. Wenn wir mit einer Polynomfunktion

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

starten, deren Koeffizienten ganze Zahlen sind, so kann man alle Nullstellen bestimmen, die rationale Zahlen sind. Der allgemeine Algorithmus sprengt den Rahmen des Vorkurses, aber wenn man Kandidaten für eine Nullstelle $q = \frac{a}{b}$ sucht, sollte man beachten, daß b ein Teiler des sogenannten Leitkoeffizienten a_n und a ein Teiler des konstanten Terms a_0 sein muß.

Beispiel 12.9 (Rationale Nullstellen)

Wenn die Polynomfunktion $f(z) = 2z^3 - z^2 + 2z - 1$ eine rationale Nullstelle $q = \frac{a}{b}$ haben soll, so muß a ein Teiler von 1 und b ein Teiler von 2 sein. Es müßte also

$$q \in \left\{ \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{1}, -\frac{1}{1} \right\}$$

in gelten. Die vier Zahlen kann man einfach testen und stellt fest, daß

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 0$$

gilt, daß also $q = \frac{1}{2}$ eine Nullstelle von f ist. Spaltet man diese mit Hilfe von Polynomdivision ab, so erhält man

$$f(z) = (2z^2 + 2) \cdot \left(z - \frac{1}{2}\right) = 2 \cdot (z^2 + 1) \cdot \left(z - \frac{1}{2}\right).$$

Die beiden Nullstellen der Polynomfunktion $z^2 + 1$ kennen wir, so daß wir insgesamt

$$f(z) = 2 \cdot (z - i) \cdot (z + i) \cdot \left(z - \frac{1}{2}\right)$$

als Zerlegung von f in Linearfaktoren erhalten.

D) Identitätssatz für holomorphe Funktionen

Beispiel 12.10

In der reellen Analysis hat man Glättungsfunktionen wie die folgende

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

zur Verfügung, die im Ursprung unendlich oft differenzierbar ist und alle Ableitungen im Ursprung sind 0, ohne daß f selbst die Nullfunktion ist. Der folgende Satz besagt, daß dies in der Funktionentheorie nicht passieren kann.

Satz 12.11 (Identitätssatz für holomorphe Funktionen)

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f, g : G \rightarrow \mathbb{C}$ seien zwei holomorphe Funktionen auf G .

Dann sind die folgenden Aussagen gleichwertig:

- $f = g$.
- Es gibt ein $z_0 \in G$, so daß $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- Es gibt ein $M \subseteq G$ mit Häufungspunkt in G , so daß $f(z) = g(z)$ für alle $z \in M$.

Beweisidee: Die interessante Frage ist, weshalb die Übereinstimmung aller Ableitungen in z_0 schon ausreicht, um die Gleichheit von f und g auf dem ganzen Gebiet zu erreichen. Dabei ist klar, daß f und g in z_0 dieselbe Taylorreihe haben und deshalb auf jeder Kreisscheibe um z_0 , die ganz in G liegt übereinstimmen.

Will man nun $f(z_1) = g(z_1)$ an einem beliebigen Punkt $z_1 \in G$ sehen, so wählt man einen stetigen Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow G$ von z_0 nach z_1 und betrachtet

$$t_0 = \sup\{t \in [0, 1] \mid f^{(n)}(\gamma(s)) = g^{(n)}(\gamma(s)) \forall s < t, \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Aus Stetigkeitsgründen gilt dann auch

$$f^{(n)}(\gamma(t_0)) = g^{(n)}(\gamma(t_0))$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, so daß f und g mit ihren Taylorreihen um $\gamma(t_0)$ auf einer Kreisscheibe um $\gamma(t_0)$ übereinstimmen, die ganz in G enthalten ist. Wäre $t_0 \neq 1$, so würde der Weg γ auch nach t_0 noch ein Stück in dieser Kreisscheibe und die Ableitungen von f und g müßten also auch nach t_0 noch übereinstimmen, im Widerspruch zur Definition von t_0 als dem Supremum der Werte, an denen dies der Fall ist (siehe Abbildung 35). Also ist $t_0 = 1$ und wir erhalten wegen $\gamma(t_0) = \gamma(1) = z_1$ insbesondere

$$f(z_1) = g(z_1).$$

□

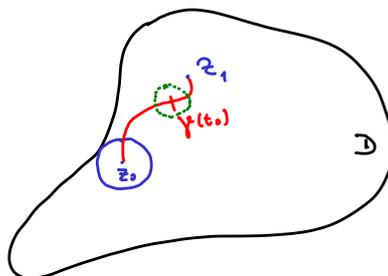


ABBILDUNG 35. Beweis des Identitätssatzes

Beispiel 12.12

Die Funktion

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \cos^2(z) + \sin^2(z) - 1$$

ist holomorph und stimmt auf der reellen Zahlenachse wegen des Satzes von Pythagoras mit der Nullfunktion überein. Da \mathbb{R} eine Teilmenge von \mathbb{C} mit Häufungspunkten ist, folgt aus dem Identitätssatz, daß f auf ganz \mathbb{C} die Nullfunktion ist, d.h. für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1.$$

Beispiel 12.13

Wir wollen feststellen, ob es eine holomorphe Funktion

$$f : K_1(0) \longrightarrow \mathbb{C}$$

mit

$$f\left(\frac{1}{2n}\right) = f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{n}$$

für alle $n \geq 1$ gibt. Wegen $\frac{1}{2n} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ hat die Menge

$$M = \left\{ \frac{1}{2n} \mid n \geq 1 \right\}$$

einen Häufungspunkt in $K_1(0)$ und für die holomorphe Funktion

$$g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto 2z$$

gilt

$$f\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{n} = 2 \cdot \frac{1}{2n} = g\left(\frac{1}{2n}\right)$$

für alle $n \geq 1$, so daß f und die holomorphe Funktion g auf der Menge M übereinstimmen. Der Identitätssatz sagt dann, daß f mit der Funktion g auf $K_1(0)$ übereinstimmen müßte, was im Widerspruch zu

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 1 \neq \frac{2}{3} = g\left(\frac{1}{3}\right)$$

steht. Also gibt es keine solche holomorphe Funktion f .

Definition 12.14 (Fortsetzung)

Sind $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ und $g : B \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $A \subseteq B$ und $f(z) = g(z)$ für alle $z \in A$, so heißt g eine *Fortsetzung* von f nach B .

Korollar 12.15 (Eindeutigkeit der holomorphen Fortsetzung)

Besitzt eine Funktion $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ eine holomorphe Fortsetzung $g : G \longrightarrow \mathbb{C}$ auf einem Gebiet G , das das Intervall (a, b) enthält, so ist diese eindeutig.

Beweis: Wenn man zwei holomorphe Fortsetzungen auf G hat, so kann man den Identitätssatz mit $M = (a, b)$ anwenden und erhält, daß die beiden Fortsetzungen übereinstimmen. \square

Beispiel 12.16

- a. Die Funktionsvorschrift

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

ist die einzige Möglichkeit, die reelle Exponentialfunktion zu einer holomorphen Funktion auf \mathbb{C} fortzusetzen.

- b. Die Identität

$$\text{id}_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto z$$

ist eine holomorphe Fortsetzung der Identität auf \mathbb{R}

$$\text{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x.$$

Die komplexe Konjugation ist eine weitere Fortsetzung von $\text{id}_{\mathbb{R}}$, da für reelle Zahlen $x \in \mathbb{R}$ stets

$$\bar{x} = x = \text{id}_{\mathbb{R}}(x)$$

gilt. Da die komplexe Konjugation nicht mit $\text{id}_{\mathbb{C}}$ übereinstimmt, folgt aus der Eindeutigkeit der holomorphen Fortsetzung, daß die komplexe Konjugation nicht holomorph auf \mathbb{C} ist. Das ist ein alternativer Beweis der entsprechenden Aussage in Beispiel 2.4.

E) Maximumprinzip

Definition 12.17 (Maximum)

- a. $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ nimmt sein *Maximum* in z_0 an, wenn $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ für alle $z \in D$.
 b. $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ nimmt sein *Minimum* in z_0 an, wenn $|f(z)| \geq |f(z_0)|$ für alle $z \in D$.

Satz 12.18 (Maximumprinzip)

Nimmt eine holomorphe Funktion $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ ihr Maximum auf einem Gebiet G an, so ist sie konstant.

Beweisidee: Nach Voraussetzung gibt es ein $z_0 \in G$, so daß $|f|$ in z_0 sein Maximum annimmt. Für ein $r > 0$ mit $K_r(z_0) \subseteq G$ gilt dann

$$\begin{aligned} |f(z_0)| &\stackrel{5.3}{=} \frac{1}{2\pi} \cdot \left| \int_{\partial K_r(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right| = \frac{1}{2\pi} \cdot \left| \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})| dt \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} |f(z_0)| dt = |f(z_0)|. \end{aligned}$$

Daraus folgt, daß

$$|f(z_0 + re^{it})| = |f(z_0)|$$

für alle $t \in [0, 2\pi]$ und für alle r mit $K_r(z_0) \subseteq G$ gilt. Mithin ist die Funktion $|f|$ konstant auf einer Kreisscheibe um z_0 , und mit etwas Rechnen kann man daraus ableiten, daß auch f konstant auf dieser Kreisscheibe ist. Aus dem Identitätssatz folgt dann, daß f schon auf G konstant ist. \square

Korollar 12.19 (Maximumprinzip)

Ist eine Funktion $f : \overline{G} \rightarrow \mathbb{C}$ auf einer offenen Umgebung des kompakten Gebietes \overline{G} holomorph, so nimmt f sein Maximum auf dem Rand von \overline{G} an.

Beweisidee: Da \overline{G} kompakt ist, nimmt die stetige Funktion $|f|$ dort ihr Maximum an. Nimmt $|f|$ sein Maximum schon in G an, so ist f nach Satz 12.18 konstant und das Maximum wird auch auf dem Rand an. \square

Beispiel 12.20

Die Funktion

$$f : \overline{K_1(0)} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \exp(-z^2)$$

ist auf ganz \mathbb{C} holomorph. Schränkt man die Funktion auf die reellen Zahlen ein, nimmt sie ihr Maximum mit

$$|f(0)| = f(0) = e^0 = 1$$

im Ursprung an, also im Inneren der Kreisscheibe. Wegen des Maximumprinzips wissen wir aber, daß das Maximum auf dem Rand der Einheitskreisscheibe angenommen werden muß. Wir wollen nun sehen, daß in der Tat

$$|f(-i)| = |f(i)| = f(i) = e$$

der maximal erreichbare Wert der Funktion ist. Dazu betrachten wir einen beliebigen Punkt $z = e^{i\alpha}$ auf dem Rand des Einheitskreises. Wegen

$$-z^2 = -e^{i2\alpha} = -\cos(2\alpha) - i\sin(2\alpha)$$

erhalten wir

$$|f(z)| = |e^{-\cos(2\alpha) - i\sin(2\alpha)}| = e^{-\cos(2\alpha)} \cdot |e^{-i\sin(2\alpha)}| = e^{-\cos(2\alpha)}.$$

Das Maximum wird dann für $-\cos(2\alpha) = 1$ und damit für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ oder $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ erreicht. Also nimmt die Funktion ihr Maximum in $z = i$ und $z = -i$ an.

Korollar 12.21 (Minimumprinzip)

Nimmt eine holomorphe Funktion f ohne Nullstelle auf einem Gebiet G ihr Minimum an, so ist die Funktion konstant.

Beweis: Wende das Maximumprinzip 12.18 auf $\frac{1}{f}$ an. \square

Beispiel 12.22

Die Funktion

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \exp(z^2)$$

ist ganz. Auf die reelle Zahlenachse eingeschränkt handelt es sich um eine Funktion ohne Nullstelle und mit Minimum im Ursprung, obwohl die Funktion nicht konstant ist. Da die Funktion auch auf \mathbb{C} keine Nullstelle hat folgt aus dem Minimumprinzip, daß f auf \mathbb{C} kein Minimum hat. Man sieht in der Tat leicht, daß

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f(r \cdot i) = \lim_{r \rightarrow \infty} e^{-r^2} = 0.$$

F) Gebietstreue holomorpher Funktionen

Bemerkung 12.23

Analysis funktioniert am besten auf offenen Mengen. Ärgerlicherweise sind die Bilder offener Mengen unter stetigen oder differenzierbaren Funktionen oft nicht wieder offen. Die unendlich oft differenzierbare Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$$

zum Beispiel bildet die offene Menge \mathbb{R} auf die nicht-offene Menge $[0, \infty)$ ab. Der folgende wichtige Satz zur Gebietstreue holomorpher Funktionen besagt, daß ein solches Verhalten bei holomorphen Funktionen nicht vorkommt.

Satz 12.24 (Gebietstreue)

Ist $f: G \longrightarrow \mathbb{C}$ eine nicht-konstante holomorphe Funktion auf einem Gebiet G , so ist $f(G)$ ein Gebiet.

Beispiel 12.25

Die holomorphe Funktion

$$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto z^2$$

bildet das Gebiet \mathbb{C} surjektiv auf das Gebiet \mathbb{C} ab, da jede komplexe Zahl eine (in der Tat sogar zwei) komplexe Wurzeln hat.

Aufgaben

Aufgabe 12.26

Bestimme alle komplexen Zahlen, die der Gleichung

$$\frac{z-3}{z-i} + \frac{z-4+i}{z-1} = 2 \cdot \frac{-3+2i}{z^2 - (1+i) \cdot z + i}$$

genügen.

Aufgabe 12.27

Bestimme die Lösungen der beiden quadratischen Gleichungen

$$z^2 - 4iz + 4z - 8i = 0$$

und

$$z^2 + 2 \cdot (1+i) \cdot z = 1 - 3i.$$

Aufgabe 12.28

Zerlege die Polynomfunktion $f(x) = x^4 + x^3 + 2x - 4$ in Linearfaktoren.

Aufgabe 12.29

Zeige, sind $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ und $g: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ganz mit $|f(z)| < |g(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$, so gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{C}$ mit $g = c \cdot f$.

Aufgabe 12.30

Überprüfe jeweils, ob es eine holomorphe Funktion f mit den angegebenen Eigenschaften gibt:

- a. $f : K_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n-1}$ für alle $n \geq 0$.
- b. $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n-1}$ für alle $n \geq 0$.
- c. $f : K_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f^{(n)}(0) = (n!)^2$ für alle $n \geq 0$?
- d. $f : K_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f^{(n)}(0) = \frac{(n-1)!}{n}$ für alle $n \geq 1$?

Aufgabe 12.31

Untersuche, ob die Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = e^z$ für $|z| < 1$ und $f(z) = e^{\frac{z}{|z|}}$ für $|z| \geq 1$ holomorph ist.

Literaturverzeichnis

- [AHK⁺08] Tilo Arens, Frank Hettlich, Christian Karpfinger, Ulrich Kockelkorn, Klaus Lichtenegger, and Hellmuth Stachel, *Mathematik*, Spektrum Verlag, 2008.
- [Bar12] Mohamed Barakat, *Einführung in die Funktionentheorie*, Vorlesungsskript WS 2011/12, TU Kaiserslautern, 2012.
- [BH13] Klemens Burg and Herbert Haf, *Funktionentheorie*, 2 ed., Springer, 2013.
- [BHW13] Klemens Burg, Herbert Haf, and Friedrich Wille, *Höhere Mathematik für Ingenieure*, 6 ed., vol. III, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Distributionen, Integraltransformationen, Springer, 2013.
- [Dir92] Hans Jörg Dirschmidt, *Mathematische Grundlagen der Elektrotechnik*, 4 ed., Vieweg, 1992.
- [Doe67] Gustav Doetsch, *Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation und der Z-Transformation*, 3 ed., Oldenbourg Verlag, 1967.
- [Ebb92] Heinz-Dieter Ebbinghaus (ed.), *Zahlen*, 3 ed., Springer, 1992.
- [FvFLSW06] Karl Finck von Finckenstein, Jürgen Lehn, Helmut Schellhaas, and Helmut Wegmann, *Arbeitsbuch Mathematik für Ingenieure, Band 2: Differentialgleichungen, Funktionentheorie, Numerik und Statistik*, 3 ed., Teubner, 2006.
- [Gre97] Gert-Martin Greuel, *Funktionentheorie I*, Vorlesungsausarbeitung Universität Kaiserslautern, 1997.
- [Rem89] Reinhold Remmert, *Funktionentheorie I*, 2 ed., Grundwissen Mathematik, vol. 5, Springer, 1989.