Fachbereich Mathematik — Wintersemester 2007/08, Blatt 1
Thomas Markwig

Algebraische Strukturen

Die Aufgaben des ersten Übungsblattes sind als Präsenzaufgaben für die Übungsstunden der ersten Woche gedacht.

Aufgabe 1: Untersuche, welche der folgenden Verknüpfungen Gruppen definieren:

a. $G := \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ mit $(a,b) \cdot (a',b') := (aa', bb')$ für $a, a', b, b' \in \mathbb{Q}$,

b. $G := \mathbb{Q}_{>0} \times \mathbb{Q}_{>0}$ mit $(a,b) \cdot (a',b') := (aa', bb')$ für $a, a', b, b' \in \mathbb{Q}_{>0}$.

Aufgabe 2: Sei M eine Menge. Für zwei Abbildungen $f : M \rightarrow M$ und $g : M \rightarrow M$ definieren wir die *Komposition* von f und g durch

$$f \circ g : M \rightarrow M : m \mapsto f\big(g(m)\big).$$

Wir nennen eine Abbildung $f : M \rightarrow M$ *bijektiv*, wenn es eine Abbildung $f' : M \rightarrow M$ gibt, so daß

$$f \circ f' = f' \circ f = \mathrm{id}_M,$$

wobei $\mathrm{id}_M : M \rightarrow M : m \mapsto m$ die Identität auf M ist. Die Menge aller bijektiven Selbstabbildungen von M bezeichnen wir mit

$$\mathrm{Sym}(M) = \{f : M \rightarrow M \mid f \text{ ist bijektiv}\}.$$

Zeige, $\big(\mathrm{Sym}(M), \circ\big)$ ist eine Gruppe.

Aufgabe 3: Es seien $(G, \cdot)$ und $(H, *)$ zwei Gruppen. Wir definieren auf der Menge $G \times H = \{(x,y) \mid x \in G, y \in H\}$ eine zweistellige Operation durch

$$(x,y) \circ (x',y') := (x \cdot x', y * y')$$

für $(x,y), (x',y') \in G \times H$. Zeige, daß dann $(G \times H, \circ)$ eine Gruppe ist.