Fachbereich Mathematik — Wintersemester 2007/08, Blatt 2
Thomas Markwig

Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Montag, 29/10/2007, 12:00

Aufgabe Nummer 4 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nicht zur Korrektur eingereicht zu werden. Wer sie jedoch bearbeiten will braucht die Aussage von Lemma 1.6 aus dem Vorlesungskript.

Aufgabe 1: Untersuche, welche der folgenden zweistelligen Operationen Gruppen definieren:

a. $G = \big(\mathbb{Q}\setminus\{0\}\big)\times\big(\mathbb{Q}\setminus\{0\}\big)$ mit $(a,b)\cdot(a',b') = (ab', ba')$ für $a, a', b, b' \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$,

b. $G = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\setminus\big\{(0,0)\big\}$ mit $(a,b)\cdot(a',b') = (aa'-bb', ab'+ba')$ für $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2: Ein Schema der Form

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ wollen wir eine *relle 2x2-Matrix* nennen, und $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ soll die Menge solcher Matrizen sein. Für zwei relle 2x2-Matrizen definieren wir ihr Produkt als

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}.$$

Ferner bezeichnen wir

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \in \mathbb{R}$$

als *Determinante* der Matrix, und definieren

$$\mathrm{Gl}_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}.$$

Zeige:

a. Für $A, B \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ gilt $\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)$.

b. $\big(\mathrm{Gl}_2(\mathbb{R}), \cdot\big)$ ist eine nicht-abelsche Gruppe.

Aufgabe 3: Es sei M eine nicht-leere Menge. Zeige, wenn $|M| \geq 3$, dann ist $\big(\mathrm{Sym}(M), \circ\big)$ nicht abelsch.

Hinweis, wenn $|M| \geq 3$, dann gibt es drei paarweise verschiedene Elemente $m, m', m'' \in M$. Benutze diese, um zwei bijektive Abbildungen $f : M \to M$ und $g : M \to M$ zu konstruieren, so daß $f \circ g \neq g \circ f$.

Aufgabe 4: Es sei $(G, \cdot)$ ein Gruppe mit neutralem Element e. Zeige, falls $g^2 = e$ für alle $g \in G$, so ist G abelsch.