Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig Wintersemester 2007/08, Blatt 3

Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Montag, 05/11/2007, 12:00

Aufgabe Nummer 4 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nicht zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 1: Zeige, die Menge

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R}, (a, b) \neq (0, 0) \right\}$$

ist eine Untergruppe von $\big(\mathrm{Gl}_2(\mathbb{R}), \cdot\big)$.

Aufgabe 2: Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe, I eine Menge und $U_i \leq G$ für $i \in I$. Zeige, $\bigcap_{i \in I} U_i$ ist eine Untergruppe von G.

Aufgabe 3: Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe, $g \in G$ und $\emptyset \neq U \subseteq G$ eine endliche Teilmenge von G. Zeige:

a. Ist $\{g^n \mid n > 0\}$ endlich, so gibt es ein $n > 0$ mit $g^n = e_G$.

b. Genau dann ist U eine Untergruppe von G, wenn für alle $u, v \in U$ auch $u \cdot v \in U$.

Aufgabe 4: Welche der folgenden Mengen sind Untergruppen von $\big(\mathrm{Sym}(\mathbb{R}), \circ\big)$?

a. $U = \{f \in \mathrm{Sym}(\mathbb{R}) \mid f(x) < f(y) \text{ falls } x > y\}$,

b. $V = \{f \in \mathrm{Sym}(\mathbb{R}) \mid |f(x)| = |x| \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$.