Fachbereich Mathematik — Wintersemester 2007/08, Blatt 4
Thomas Markwig

Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Montag, 12/11/2007, 12:00
Aufgabe Nummer 4 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nicht zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 1: Betrachte die Gruppe $(G, \cdot)$ aus Blatt 2, Aufgabe 1b. und die Gruppe $(U, \cdot)$ aus Blatt 3, Aufgabe 1. Zeige, die Abbildung

$$\alpha : G \longrightarrow U : (a, b) \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

ist ein Gruppenisomorphismus.

Aufgabe 2: Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $g \in G$. Zeige:

a. Gilt $g^k \neq g^l$ für alle $k, l \in \mathbb{Z}$ mit $k \neq l$, so ist die Abbildung

$$\alpha : \mathbb{Z} \longrightarrow G : n \mapsto g^n$$

ein Gruppenmonomorphismus mit Bild $\mathrm{Im}(\alpha) = \langle g \rangle$.

b. Gibt es ganze Zahlen $k \neq l$ mit $g^k = g^l$, so ist existiert die Zahl $n = \min\{m \in \mathbb{N} \mid m > 0, g^m = e_G\}$ und es gelten

$$\langle g \rangle = \{e_G, g, g^2, \ldots, g^{n-1}\} \quad \text{und} \quad |\langle g \rangle| = n.$$

Hinweis: In Teil b. verwende man die Division mit Rest für ganze Zahlen, d.h. die Eigenschaft, daß es für zwei ganze Zahlen m und n eindeutig bestimmte ganze Zahlen q und r gibt mit $m = q \cdot n + r$ und $0 \leq r < |n|$. r heißt der Rest von m durch n bei Division mit Rest. Diese Art, ganze Zahlen zu teilen kennt Ihr schon aus der Grundschule.

Aufgabe 3: Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Zeige, $\alpha : G \longrightarrow G : g \mapsto g^2$ ist genau dann ein Gruppenhomomorphismus, wenn G abelsch ist.

Aufgabe 4: Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $h, k \in G$ fest gegeben. Prüfe, welche Bedingungen für h und k gelten müssen, damit die folgenden Abbildungen Gruppenhomomorphismen sind:

a. $\alpha : G \rightarrow G : g \mapsto h \cdot g \cdot h$,

b. $\beta : G \rightarrow G : g \mapsto h^{-1} \cdot g \cdot k$,