Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Wintersemester 2007/08, Blatt 5

Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Montag, 19/11/2007, 12:00

Aufgabe Nummer 4 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nicht zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 1: Es sei $\alpha : (G,\cdot) \longrightarrow (H,*)$ ein Gruppenhomomorphismus, $g \in G$ und $g' \in \mathrm{Ker}(\alpha)$. Zeige, dann gilt $g^{-1} \cdot g' \cdot g \in \mathrm{Ker}(\alpha)$.

Aufgabe 2: Es sei $(G,\cdot)$ eine Gruppe und $g \in G$. Zeige:

a. Die Abbildung $L_g : G \longrightarrow G : h \mapsto g \cdot h$ ist bijektiv.

b. Die Abbildung $\alpha : G \longrightarrow \mathrm{Sym}(G) : g \mapsto L_g$ ist ein Monomorphismus.

Anmerkung: Man nennt die Aussage in Teil b. auch den *Satz von Cayley*. Er besagt letztlich, daß jede Gruppe isomorph zu einer Untergruppe einer symmetrischen Gruppe ist.

Aufgabe 3: Es sei $\alpha : (G,\cdot) \longrightarrow (H,*)$ ein Monomorphismus und $g \in G$. Wir nennen die Mächtigkeit des Erzeugnisses von g die *Ordnung* von g und bezeichnen sie mit $o(g) := |\langle g \rangle|$. Zeige, $o(g) = o\big(\alpha(g)\big)$.

Hinweis, verwende Aufgabe 2 von Blatt 4. – Es ist ein wichtiges Prinzip, daß ein Monomorphismus alle guten Eigenschaften einer Gruppe bzw. ihrer Elemente erhält. Die Ordnung eines Elementes ist ein Beispiel für dieses Prinzip.

Aufgabe 4: Betrachte die Permutationen

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 6 & 3 & 7 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 7 & 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{S}_7.$$

a. Berechne $\sigma \circ \pi$, $\pi \circ \sigma$, σ^{-1}, π^{-1}.

b. Bestimme für jede der Permutationen in a. die Zyklenzerlegung.

c. Schreibe $\sigma \circ \pi$ als ein Produkt von Transpositionen.

d. Schreibe π^{-1} als ein Produkt von Transpositionen aufeinander folgender Zahlen.

e. Berechne für jede der Permutationen in a. das Signum.

Beachte, einige der Begriffe in der Aufgabe werden erst in der fünften Vorlesung eingeführt und sind erst kurz vor den Übungen bekannt! Die Fernstudenten können deshalb die Teile b.-e. noch mit den Abgaben des nächsten Blattes zur Korrektur einreichen, oder ihre Ergebnisse mit den Musterlösungen vergleichen.