Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig Wintersemester 2007/08, Blatt 6

Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Montag, 26/11/2007, 12:00
Aufgabe Nummer 4 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nicht zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 1: Finde zwei Untergruppen von $\mathbb{S}_4$, die beide die Mächtigkeit 4 besitzen, aber nicht isomorph zueinander sind. Begründe, weshalb es Untergruppen sind und weshalb sie nicht isomorph zueinander sind.

Hinweis, eine der Gruppen wird ein Element der Ordnung 4 besitzen, die andere nicht. Verwende dann Aufgabe 3 von Blatt 5, um zu zeigen, daß die Gruppen nicht isomorph sein können.

Aufgabe 2: Es sei $M = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{Q}\}$ die Menge aller Folgen rationaler Zahlen. Zeige, daß durch

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad :\Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$$

eine Äquivalenzrelation auf M definiert wird.

Ihr dürft verwenden, was Ihr aus den Grundlagen der Mathematik zu konvergenten Zahlenfolgen wißt.

Aufgabe 3: Sei $0 \neq n \in \mathbb{N}$ und $(\mathbb{S}_n, \circ)$ die symmetrische Gruppe vom Grad n und $\sigma \in \mathbb{S}_n$ eine beliebige Permutation.

a. Für $a, b \in \{1, \ldots, n\}$ definieren wir

$$a \sim b \;:\Leftrightarrow\; \exists\, \nu \in \mathbb{Z} \;:\; a = \sigma^\nu(b).$$

Zeige, $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\{1, \ldots, n\}$.

b. Für $a \in \{1, \ldots, n\}$ bezeichne $[a]$ die Äquivalenzklasse von a bez. $\sim$. Zeige:

(a) das Minimum $k = \min\{l > 0 \mid \sigma^l(a) = a\}$ existiert,

(b) für $q \in \mathbb{Z}$ gilt $\sigma^{q\cdot k}(a) = a$,

(c) $[a] = \left\{a, \sigma(a), \ldots, \sigma^{k-1}(a)\right\}$, und

(d) $[a]$ enthält genau k Elemente.

Aufgabe 4: Bestimme die Elemente der Untergruppe $\mathbb{D}_8 = \langle (1\ 2\ 3\ 4), (2\ 4)\rangle \leq \mathbb{S}_4$ von $\mathbb{S}_4$.