Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Wintersemester 2007/08, Blatt 7

Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Montag, 03/12/2007, 12:00
Aufgabe Nummer 4 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nicht zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 1: Wir definieren für zwei Punkte $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \sim (x', y') \quad :\Longleftrightarrow \quad |x| + |y| = |x'| + |y'|.$$

Zeige, $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^2$. Zeichne die Äquivalenzklassen zu $(1, 1)$ und zu $(-2, 3)$ in die Zahlenebene $\mathbb{R}^2$ ein.

Aufgabe 2: Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $U \leq G$. Zeige, die folgenden Aussagen sind äquivalent:

a. $g^{-1}ug \in U$ für alle $u \in U$ und alle $g \in G$.

b. $g^{-1}Ug = U$ für alle $g \in G$.

c. $gU = Ug$ für alle $g \in G$.

d. $(gU) \cdot (hU) = ghU$ für alle $g, h \in G$.

Hinweis: Um die Äquivalenz von mehreren Aussagen zu zeigen, kann man einen sogenannten Ringschluß machen. Es reicht zu zeigen: “a. $\Rightarrow$ b. $\Rightarrow$ c. $\Rightarrow$ d. $\Rightarrow$ a.”, denn aus “a. $\Rightarrow$ b.” und “b. $\Rightarrow$ c.” folgt z.B. “a. $\Rightarrow$ c.”, d.h. die scheinbar noch fehlenden Implikationen ergeben sich von selbst.

Aufgabe 3: Sei $(\mathbb{S}_n, \circ)$ die symmetrische Gruppe vom Grad $n > 0$ und $\sigma \in \mathbb{S}_n$ eine beliebige Permutation. Zeige, daß es eine disjunkte Zerlegung

$$\{1, \ldots, n\} = \coprod_{i=1}^{t} \{a_{i1}, \ldots, a_{ik_i}\}$$

gibt, so daß

$$\sigma = (a_{11} \cdots a_{1k_1}) \circ \ldots \circ (a_{t1} \cdots a_{tk_t}).$$

Hinweis, verwende die Äquivalenzrelation von Aufgabe 3, Blatt 6 um die Zerlegung zu finden.

Aufgabe 4: Bestimme alle Untergruppen der Gruppe $\mathbb{D}_8 = \langle (1\ 2\ 3\ 4), (2\ 4) \rangle$ aus Aufgabe 4, Blatt 6.