Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig Wintersemester 2007/08, Blatt 9

Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Montag, 17/12/2007, 12:00
Aufgabe Nummer 4 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nicht zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 1: Es sei G eine Gruppe, $U \leq G$ und $N \trianglelefteq G$. Zeige, $UN/N \cong U/U \cap N$.

Aufgabe 2: Es seien $(G, \cdot)$ und $(H, *)$ zwei endliche Gruppen teilerfremder Ordnung. Zeige, es gibt genau einen Gruppenhomomorphismus $\alpha : G \longrightarrow H$.
Hinweis, verwende den Homomorphissatz und den Satz von Lagrange.

Aufgabe 3: Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Zeige:

a. Sind $g, h \in G$ mit $o(g) = o(h) = p$, wobei p eine Primzahl ist, dann gilt $\langle g \rangle = \langle h \rangle$ oder $\langle g \rangle \cap \langle h \rangle = \{e\}$.

b. Falls $|G| = 10$, so gibt es zwei Elemente $g, h \in G$ mit:

- $o(g) = 2$,
- $o(h) = 5$,
- $\langle h \rangle \trianglelefteq G$,
- $\langle g \rangle \cdot \langle h \rangle = G$.

Hinweis, führe in Teil b. zunächst die folgenden beiden folgenden Möglichkeiten zum Widerspruch: 1. $o(k) = 2$ für alle $e \neq k \in G$, 2. $o(k) = 5$ für alle $e \neq k \in G$.

Anmerkung, in Teil b. nennt man G das semidirekte Produkt von $\langle g \rangle$ und $\langle h \rangle$. Man kann zeigen, falls $g \cdot h = h \cdot g$, so ist G isomorph zu $\mathbb{Z}_{10}$, andernfalls ist G isomorph zu $\mathbb{D}_{10}$.

Aufgabe 4: Bestimme alle Gruppenhomomorphismen $\alpha : \mathbb{Z}_{10} \longrightarrow \mathbb{Z}_n$ mit $n \in \{6, 13\}$.