Fachbereich Mathematik Wintersemester 2007/08, Blatt 10
Thomas Markwig

Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Montag, 07/01/2008, 12:00

Aufgabe Nummer 4 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nicht zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 1: Es sei G eine Gruppe von ungerader Ordnung. Zeige, id_G ist eine vollständige Abbildung.

Aufgabe 2: Es sei R ein kommutativer Ring mit Eins und $f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot t^k \in R[[t]]$ eine formale Potenzreihe über R. Zeige, f ist genau dann eine Einheit in $R[[t]]$, wenn a_0 eine Einheit in R ist.

Hinweis, wenn a_0 eine Einheit in R ist, so ist eine Reihe $g = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cdot t^k$ mit $f \cdot g = t^0$ gesucht. Multipliziere die linke Seite der Gleichung aus und löse die Gleichungen, die sich für die Koeffizienten ergeben rekursiv.

Aufgabe 3:

a. Es sei R ein Ring mit Eins und $S \subset R$ ein nicht-leere Teilmenge für die gilt:

- $x + y \in S$ für alle $x, y \in S$,
- $-x \in S$ für alle $x \in S$,
- $x \cdot y \in S$ für alle $x, y \in S$ und
- $1_R \in S$.

Zeige, S ist ein Ring mit Eins bezüglich der Einschränkung der Addition und der Multiplikation von R auf S.

b. Zeige, $\mathbb{Z}[i] := \{a + i \cdot b \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ ist ein kommutativer Ring mit Eins, wobei die Addition und die Multiplikation einfach die Addition und Multiplikation komplexer Zahlen sein sollen.

c. Bestimme die Einheitengruppe $\mathbb{Z}[i]^*$ des Ringes $\mathbb{Z}[i]$.

Aufgabe 4:

a. Zeige, $\mathbb{Z}[i \cdot \sqrt{5}] := \{a + b \cdot i \cdot \sqrt{5} \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ ist ein kommutativer Ring mit Eins, wobei die Addition und die Multiplikation einfach die Addition und Multiplikation komplexer Zahlen sein sollen.

b. Zeige, $\mathbb{Z}[i \cdot \sqrt{5}]^* = \{1, -1\}$.