Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig Wintersemester 2007/08, Blatt 11

Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Montag, 14/01/2008, 12:00
Aufgabe Nummer 4 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nicht zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 1: Es sei R ein kommutativer Ring mit Eins und $f, g \in R[t]$ seien zwei Polynome. Zeige:

a. $\deg(f+g) \leq \max\{\deg(f), \deg(g)\}$.

b. $\deg(f \cdot g) \leq \deg(f) + \deg(g)$.

c. $\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g)$, falls R ein Körper ist.

d. Finde Beispiele in Teil a. und b., wo die Ungleichung strikt ist.

Beachte, der Grad des Nullpolynoms ist $-\infty$, und wir verwenden die Konventionen $-\infty \leq m$ und $-\infty + m = -\infty$ für alle $m \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$.

Aufgabe 2: Es seien K ein Körper, R ein kommutativer Ring mit $1_R \neq 0_R$ und $\varphi : K \longrightarrow R$ ein Ringhomomorphismus. Zeige, φ ist ein Monomorphismus.

Aufgabe 3: Es sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Zeige, R ist genau dann ein Körper, wenn R genau zwei Ideale hat.

Aufgabe 4: Beachte, daß $\mathbb{Z}$ mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation ein Ring ist und daß $5\mathbb{Z} = \langle 5 \rangle_{\mathbb{Z}}$ ein Ideal in $\mathbb{Z}$ ist. Zeige, der Faktorring $\mathbb{Z}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ist ein Körper.