Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Wintersemester 2007/08, Blatt 12

# Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Montag, 21/01/2008, 12:00

Aufgabe Nummer 4 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nicht zur Korrektur eingereicht zu werden.

**Aufgabe 1:**

a. Bestimme $\mathbb{Z}_6^*$.

b. Bestimme $\mathbb{Z}_8^*$.

c. Bestimme $\mathbb{Z}_{15}^*$.

d. Stelle eine Vermutung auf, wann eine Element $[z] \in \mathbb{Z}_n$ für $n \geq 2$ eine Einheit ist.

e. Zeige, für alle $n \geq 2$ ist $[n-1] \in \mathbb{Z}_n$ eine Einheit.

**Aufgabe 2:** Sei $R$ ein Integritätsbereich, $a, b \in R$.

a. Ist $g \in \mathrm{ggT}(a, b)$, dann ist $\mathrm{ggT}(a, b) = \{u \cdot g \mid u \in R^*\}$, d.h. ein größter gemeinsamer Teiler ist bis auf Multiplikation mit Einheiten eindeutig bestimmt.

b. Ist $k \in \mathrm{kgV}(a, b)$, dann ist $\mathrm{kgV}(a, b) = \{u \cdot k \mid u \in R^*\}$, d.h. ein kleinstes gemeinsames Vielfaches ist bis auf Multiplikation mit Einheiten eindeutig bestimmt.

**Aufgabe 3:** Es sei $R$ ein kommutativer Ring mit Eins, der nur endlich viele Elemente enthält. Zeige, dann ist jedes Element von $R$ entweder eine Einheit oder ein Nullteiler.

**Aufgabe 4:**

a. Finde alle Ringhomomorphismen $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_6$.

b. Finde alle Ringhomomorphismen $\varphi : \mathbb{Z}_6 \longrightarrow \mathbb{Z}$.

c. Finde alle Ringhomomorphismen $\varphi : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$.