Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig Wintersemester 2007/08, Blatt 13

Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Montag, 28/01/2008, 12:00

Aufgabe Nummer 4 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nicht zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 1: Es sei K ein Körper und es gebe eine natürliche Zahl $n \geq 1$ so, daß $\sum_{k=1}^{n} 1_K = 0_K$, d.h. die n-fache Summe des Einselementes ergibt das Nullelement. Zeige, daß die kleinste positive ganze Zahl $p = \min\{m \in \mathbb{Z}_{>0} \mid \sum_{k=1}^{m} 1_K = 0_K\}$ mit dieser Eigenschaft irreduzibel (d.h. eine Primzahl) ist.

Anmerkung, man nennt die Zahl p auch die Charakteristik des Körpers.

Aufgabe 2:

a. Es sei $f = t^n + a_{n-1} \cdot t^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot t + a_0 \in \mathbb{Z}[t]$. Zeige, falls es eine Primzahl $p \in \mathbb{Z}$ gibt, so daß $g = t^n + [a_{n-1}] \cdot t^{n-1} + \ldots + [a_1] \cdot t + [a_0] \in \mathbb{Z}_p[t]$ irreduzibel in $\mathbb{Z}_p[t]$ ist, so ist f irreduzibel in $\mathbb{Z}[t]$.

b. Bestimme alle Polynome f in $\mathbb{Z}_2[t]$ vom Grad $0 \leq \deg(f) \leq 4$ und schreibe sie jeweils als Produkt von möglichst vielen Polynomen vom Grad größer oder gleich 1.

c. Ist $f = t^4 + 87t^3 + t^2 - 33t + 1 \in \mathbb{Z}[t]$ irreduzibel?

Aufgabe 3: Zeige, daß $\mathbb{Z}[i] = \{x + i \cdot y \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ ein euklidischer Ring mit euklidischer Funktion $\nu : \mathbb{Z}[i] \longrightarrow \mathbb{N} : a \mapsto |a|^2$ ist.

Hinweis, wenn man a durch b mit Rest dividieren will, sollte man sich zunächst die komplexe Zahl $\frac{a}{b}$ anschauen und sich überlegen, wie weit sie von einer Zahl in $\mathbb{Z}[i]$ entfernt ist.

Aufgabe 4: Es sei R ein Integritätsbereich. Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf $R \times (R \setminus \{0\})$ durch

$$(a, b) \sim (a', b') \quad :\Longleftrightarrow \quad a \cdot b' = a' \cdot b.$$

Die Äquivalenzklasse von (a, b) bezeichnen wir mit $\frac{a}{b}$, und die Menge aller Äquivalenzklassen bezeichnen wir mit $\mathrm{Quot}(R)$. Auf dieser Menge definieren wir eine Addition und eine Multiplikation durch

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{ad + bc}{bd} \quad \text{und} \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{ac}{bd}.$$

Zeige:

a. $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.

b. Die Addition und die Multiplikation sind wohldefiniert.

c. $\big(\mathrm{Quot}(R), +, \cdot\big)$ ist ein Körper, der sogenannte *Quotientenkörper* von R.