Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Wintersemester 2007/08, Blatt 14

# Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Montag, 04/02/2008, 12:00

Aufgabe Nummer 4 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nicht zur Korrektur eingereicht zu werden.

**Aufgabe 1:** Betrachte die Polynome

$$f = t^5 + 3t^4 + 2t^3 + 5t^2 + 7t + 2 \in \mathbb{Z}[t]$$

und

$$g = t^3 + t^2 + t + 1 \in \mathbb{Z}[t].$$

a. Bestimme einen größten gemeinsamen Teiler von $f$ und $g$ in $\mathbb{Q}[t]$ mittels des euklidischen Algorithmus.

b. Wie in Aufgabe 2a., Blatt 13 betrachte die Koeffizienten von $f$ und $g$ modulo $3$ und bestimme einen größten gemeinsamen Teiler der resultierenden Polynome in $\mathbb{Z}_3[t]$.

**Aufgabe 2:**

a. Ist $K$ ein Körper und $f \in K[t]$ ein Polynom mit $\deg(f) \in \{2, 3\}$. Zeige, $f$ ist genau dann irreduzibel, wenn $f$ keine Nullstelle hat.

b. Ist $f = t^3 + 3t + 1 \in \mathbb{Z}[t]$ irreduzibel? Falls nicht, schreibe $f$ als Produkt von irreduziblen Polynomen.

c. Ist $f_5 = t^3 + [3] \cdot t + [1] \in \mathbb{Z}_5[t]$ irreduzibel? Falls nicht, schreibe $f_5$ als Produkt von irreduziblen Polynomen.

**Aufgabe 3:** Es sei $K$ ein Körper und $0 \neq f \in K[t]$ ein Polynom vom Grad $n = \deg(f)$. Zeige, $f$ hat höchsten $n$ Nullstellen.

**Aufgabe 4:** Zeige, $f = t^2 + t + 1 \in \mathbb{Z}_2[t]$ ist irreduzibel und $K = \mathbb{Z}_2[t]/\langle f \rangle$ ist ein Körper mit $4$ Elementen. Stelle die Additions- und Multiplikationstabelle für $K$ auf. Was ist die Charakteristik (siehe Aufgabe 1, Blatt 13) von $K$? Ist $K$ isomorph zu $\mathbb{Z}_4$? Betrachten wir den Polynomring $K[x]$ über $K$ in der Unbestimmten $x$. Ist das Polynom $g = x^2 + x + [1] \in K[x]$ irreduzibel? Hat $g$ eine Nullstelle in $K$?

Anmerkung, in dieser Aufgabe wollen wir die Elemente $[0]$ und $[1]$ in $\mathbb{Z}_2$ der Einfachheit halber mit $0$ und $1$ bezeichnen, wobei $1 + 1 = 0$ gilt. Das ist deshalb sinnvoll, weil auch die Elemente von $\mathbb{Z}_2[t]/\langle f \rangle$ wieder Restklassen sind, und die doppelten Restklassen (z.B. $[t + [1]]$) für unnötige Verwirrung sorgen.