Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Wintersemester 2007/08, Blatt 15

Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Montag, 11/02/2008, 12:00

Aufgaben Nummer 3 und 4 sind Präsenzaufgaben und brauchen nicht zur Korrektur eingereicht zu werden. Inhaltlich beziehen sie sich auf die letzte Vorlesung algebraische Strukturen am 11.2.2008.

Aufgabe 1: Es sei R ein Integritätsbereich. Dann sind die folgenden Aussagen gleichwertig:

a. R ist ein Körper.

b. $R[t]$ ist ein euklidischer Ring.

c. $R[t]$ ist ein Hauptidealring.

Aufgabe 2: Es sei K ein Körper und $I \lhd K[[t]]$ ein Ideal mit $I \neq \{0\}$ und $I \neq K[[t]]$. Zeige, es gibt ein $n \geq 1$ mit $I = \langle t^n \rangle_{K[[t]]}$. Ist $K[[t]]$ faktoriell?

Hinweis, jede Potzenreihe $0 \neq f$ läßt sich schreiben als $t^k \cdot u$ für ein $k \in \mathbb{N}$ und eine Einheit $u \in K[[t]]^*$. Wieso?

Aufgabe 3: Löst das folgende Kongruenzgleichungssystem in $\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} x &\equiv 6 \pmod{15} \\ x &\equiv 2 \pmod{4} \\ x &\equiv 1 \pmod{7} \end{aligned}$$

Aufgabe 4: [Tausendundeine Nacht]*

Scheherazade erzählt dem Sultan Scharyar jede Nacht eine Geschichte. In der 1000sten Nacht will sie überprüfen, ob sich der Sultan tatsächlich so genau an jede Geschichte erinnert, wie er sagt. Dafür skizziert sie eine der Geschichten noch einmal und der Sultan soll sagen, in der wievielten Nacht die Geschichte erzählt wurde. Der Sultan als Herrscher des Orients darf als Hilfe bis zu drei Fragen nach dem Rest der gesuchten Zahl modulo dreier Primzahlen p_1, p_2 und p_3 stellen, wobei Scheherazade nur Zahlen kleiner als 14 akzeptiert. Kann er die Nacht auch benennen, wenn er sich nicht mehr erinnert?

*Die Aufgabe habe ich mir in leicht abgewandelter Form von Eva Zerz und Victor Levandovsky aus Aachen geborgt.