Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Wintersemester 2008/09, Blatt 2

Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Montag, 27/10/2008, 12:00

Aufgabe Nummer 8 ist eine Präsenzaufgabe und braucht nur von den Fernstudenten zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 5: Untersuche, welche der folgenden zweistelligen Operationen Gruppen definieren:

a. $G = \{5 \cdot z \mid z \in \mathbb{Z}\}$ mit der Multiplikation ganzer Zahlen als Verknüpfung,

b. $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \big\{(0,0)\big\}$ mit $(a,b) \cdot (a',b') = (aa' - bb', ab' + ba')$ für $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 6: Ein Schema der Form

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ wollen wir eine *relle 2x2-Matrix* nennen, und $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ soll die Menge solcher Matrizen sein. Für zwei relle 2x2-Matrizen definieren wir ihr Produkt als

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}.$$

Ferner bezeichnen wir

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \in \mathbb{R}$$

als *Determinante* der Matrix, und definieren

$$\mathrm{Gl}_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}.$$

Zeige:

a. Für $A, B \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ gilt $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

b. $\big(\mathrm{Gl}_2(\mathbb{R}), \cdot\big)$ ist eine nicht-abelsche Gruppe.

Aufgabe 7: Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $a \in G$ sei fest gegeben. Wir definieren eine zweistellige Operation auf G durch

$$* : G \times G \longrightarrow G : (g,h) \mapsto g * h = g \cdot \big(a^{-1} \cdot h\big).$$

Überprüfe, ob $(G, *)$ eine Gruppe ist.

Aufgabe 8: [Boolsche Gruppe]

Es sei M eine Menge und $G = \mathcal{P}(M) = \{A \mid A \subseteq M\}$ die Potenzmenge von M. Wir definieren auf G eine zweistellige Operation durch

$$A + B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

für $A, B \in G$. Zeige, $(G, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

Hinweis: man zeige zunächst für $X, Y, Z \subseteq M$ die Relationen $X \setminus \big((Y \setminus Z) \cup (Z \setminus Y)\big) = \big(X \setminus (Y \cup Z)\big) \cup (X \cap Y \cap Z)$ und $\big((X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)\big) \setminus Z = \big(X \setminus (Y \cup Z)\big) \cup \big(Y \setminus (X \cup Z)\big)$ und nutze diese dann um die Assoziativität $(A + B) + C = \big(A \setminus (B \cup C)\big) \cup \big(B \setminus (A \cup C)\big) \cup \big(C \setminus (A \cup B)\big) \cup (A \cap B \cap C) = A + (B + C)$ zu zeigen.